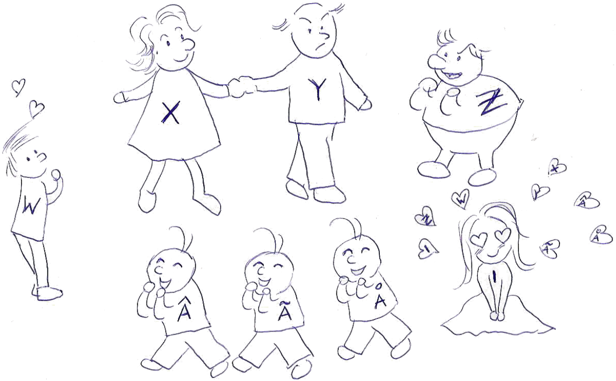
Was sind und was sollen Kategorien?



Gliederung

Produkte in Kategorien I

- Kartesisches Produkt von Mengen: $X \times Y$
- Kartesisches Produkt von Vektorräumen: $V \times W$
- Kartesisches Produkt von Gruppen: $G \times H$
- Kartesisches Produkt von Garben: $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$
- Kartesisches Produkt von Vektorbündeln: $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$
- Minimum von Zahlen: $\min\{n, m\}$
- Größter gemeinsamer Teiler von Zahlen: $\mathrm{ggT}(n, m)$
- Paartyp in Programmiersprachen: `(a,b)`
- Mutterknoten zweier Knoten in einem Graph

All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Produkts*.

Produkte in Kategorien II

$$X \times (Y \times Z) \cong (X \times Y) \times Z$$
$$U \times (V \times W) \cong (U \times V) \times W$$
$$\min\{m, \min\{n, p\}\} = \min\{\min\{m, n\}, p\}$$
$$\mathrm{ggT}(m, \mathrm{ggT}(n, p)) = \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(m, n), p)$$

All dies sind Spezialfälle der allgemeinen *Assoziativität* des kategoriellen Produkts.

Isomorphismen in Kategorien

- Zwei Mengen X, Y können gleichmächtig sein.
- Zwei Vektorräume V, W können isomorph sein.
- Zwei Gruppen G, H können isomorph sein.
- Zwei top. Räume X, Y können homöomorph sein.
- Zwei Zahlen n, m können gleich sein.
- Zwei Typen `a`, `b` können sich verlustfrei ineinander umwandeln lassen.

All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Isomorphiekonzepts*.

Dualität

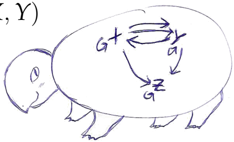
$f \circ g$	$g \circ f$
$\leq$	$\geq$
injektiv	surjektiv
$\{\star\}$	$\emptyset$
$\times$	$\coprod$
ggT	kgV
$\cap$	$\cup$
Teilmenge	Faktormenge

All dies sind Spezialfälle eines allgemeinen *kategoriellen Dualitätsprinzips*.

Kategorien

Definition: Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus

1. einer Klasse von *Objekten* $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$,
2. zu je zwei Objekten $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ einer Klasse $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen* zwischen ihnen und
3. einer Kompositionsvorschrift:



$$\begin{array}{rl} \text{zu} & f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \\ \text{und} & g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \\ \text{habe} & g \circ f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z), \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{zu} & f : X \to Y \\ \text{und} & g : Y \to Z \\ \text{habe} & g \circ f : X \to Z, \end{array}$$

sodass

1. die Komposition $\circ$ assoziativ ist und
2. es zu jedem $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ einen *Identitätsmorphismus* $\mathrm{id}_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ mit

$$f \circ \mathrm{id}_X = f, \quad \mathrm{id}_X \circ g = g$$

für alle Morphismen f, g gibt.

- Die Morphismen müssen nicht unbedingt Abbildungen sein. Die Schreibweise „$f : X \to Y$“ missbraucht also Notation.
- Archetypisches Beispiel ist Set, die Kategorie der Mengen und Abbildungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob}\mathrm{Set} &:= \{M \mid M \text{ ist eine Menge}\} \\ \operatorname{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, Y) &:= \{f : X \to Y \mid f \text{ ist eine Abbildung}\} \end{aligned}$$

- Die meisten Teilgebiete der Mathematik studieren jeweils eine bestimmte Kategorie: Gruppentheoretiker beschäftigen sich etwa mit der Kategorie Grp der Gruppen und Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob}\mathrm{Grp} &:= \text{Klasse aller Gruppen} \\ \operatorname{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G, H) &:= \{f : G \to H \mid f \text{ ist ein Gruppenhomo}\} \end{aligned}$$

- Es gibt aber auch wesentlich kleinere Kategorien. Etwa kann man aus jeder Partialordnung $(P, \preceq)$ eine Kategorie $\mathcal{C}$ basteln:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ob} \mathcal{C} &:= P \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) &:= \begin{cases} \text{einelementige Menge,} & \text{falls } x \preceq y, \\ \text{leere Menge,} & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

- Auch sind gewisse endliche Kategorien bedeutsam, etwa die durch folgende Skizze gegebene:

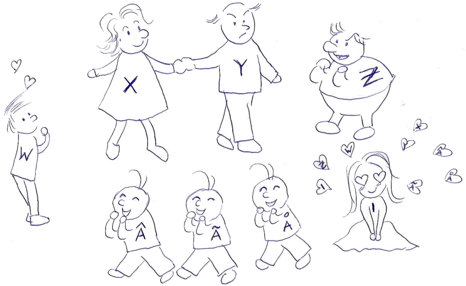
$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[d] \arrow[loop above] \\
\bullet \arrow[r] \arrow[loop left] & \bullet \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Gleichungen zwischen Morphismen schreibt man gerne als kommutative Diagramme:

$$h = g \circ f \qquad \Longleftrightarrow: \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \arrow[d, phantom, "\%"] & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Fundamentales Motto

Kategorientheorie stellt *Beziehungen zwischen Objekten* statt etwaiger innerer Struktur in den Vordergrund.



Initiale und terminale Objekte

Definition: Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *initial*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\colon \exists! f : X \to Y.$$
- *terminal*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\colon \exists! f : Y \to X.$$

Frage: Was ist ein terminales Objekt in Set?

Initiale und terminale Objekte

Definition: Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *initial*, wenn

$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\colon \exists! f : X \to Y.$$

- *terminal*, wenn

$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\colon \exists! f : Y \to X.$$

In Set: $\emptyset$ initial, $\{\star\}$ terminal.

In $\mathbb{R}$−Vect: $\mathbb{R}^0$ initial und terminal.

Mono- und Epimorphismen

Definition: Ein Morphismus $f : X \to Y$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *Monomorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und $p, q : A \to X$ gilt:

$$f \circ p = f \circ q \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$

- *Epimorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und $p, q : Y \to A$ gilt:

$$p \circ f = q \circ f \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$

Beobachtung in Set, Grp und $\mathbb{R}-$Vect:

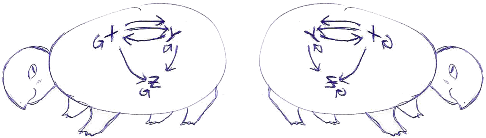
$$f \text{ Mono} \Longleftrightarrow f \text{ injektiv.}$$
$$f \text{ Epi} \Longleftrightarrow f \text{ surjektiv.}$$

Duale Kategorie

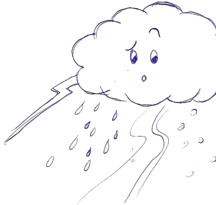
- **Definition:** Zu jeder Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es eine zugehörige *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$:

$$\operatorname{Ob} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} := \operatorname{Ob} \mathcal{C}$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

- **Beispiel:** X in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ initial $\iff$ X in $\mathcal{C}$ terminal
- **Beispiel:** f in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ Mono $\iff$ f in $\mathcal{C}$ Epi
- **Nichttriviale Frage:** Wie kann man in konkreten Fällen $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ explizit (inhaltlich) beschreiben?



Anwendungen



- Kategorientheorie liefert einen Leitfaden, um richtige Definitionen zu formulieren.
- Triviales wird *trivialerweise* trivial: Allgemeiner abstrakter Nonsens.
- Konzeptionelle Vereinheitlichung: Viele Konstruktionen in der Mathematik sind Spezialfälle von allgemeinen kategoriellen: Limiten, Kolimiten, adjungierte Funktoren
- Forschungsprogramm der Kategorifizierung, um tiefere Gründe für Altbekanntes zu finden.
- siehe Bonusthemen!