Voyager 1: 17 km/s (weg von der Sonne)

New Horizons: ⇝ Pluto (Sommer 2015)

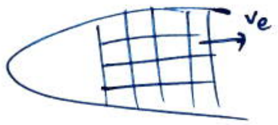
Newtonsche Gesetze

1. In einem Inertialsystem bewegt ein Objekt sich mit konstanter Geschwindigkeit, falls es keine Kräfte gibt.
2. Falls eine Kraft auf ein Objekt A wirkt, dann beschleunigt A sich wie $F = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Masse}}}{m} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Beschl.}}}{a}$.
3. Falls ~~auf~~ ein Objekt A auf ein Objekt B mit Kraft F_A, dann wirkt B auf A mit Kraft $F_B = -F_A$.

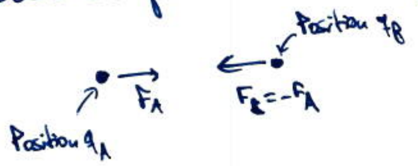
Bem.: 1., 2., 3. stimmen fast, falls

- Geschwindigkeit $v < 10^5$ km/s [spez. Rel.]
- Objekte nicht zu klein: $> 10^{-6}$ m [QM]
- Objekte nicht zu groß: Masse $< 10^{32}$ kg (Sonne: $2 \cdot 10^{30}$ kg) [allg. Rel.]

Impulserhaltung: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ändert sich} \\ \text{mit } F_A}}{m_A v_A} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ändert sich mit} \\ F_B = -F_A}}{m_B v_B}$ ist konstant



Zweiteilchenproblem ⇝ Einteilchenproblem



$$q_{\text{Schwerpunkt}} := \frac{m_A q_A + m_B q_B}{m_A + m_B}$$

~~Da~~ $v_{\text{Schwerpunkt}}$ ~~ist~~ ändert sich nicht.

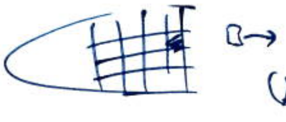
Also: Durch Änderung des Inertialsystems können wir annehmen, dass $q_S = 0$ für alle Zeiten.

Betrachte $q_A - q_B =: q_R$, reduzierte Masse $\mu := \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$

$$\mu(v_A - v_B) = \frac{m_B}{m_A + m_B} m_A v_A - \frac{m_A}{m_A + m_B} m_B v_B$$

ändert sich mit F_A.

patched conics



$(\Delta m) \cdot v_e$

$(m - \Delta m) \cdot \Delta v$

Raketengl.: $v_{\text{endgültig}} = v_e \cdot \ln \frac{m_{\text{Anfang}}}{m_{\text{Ende}}}$.

Rakete ist Brennstoffreservoir

„Besser": Ionenantrieb (Kraft klein)

Hayabusa

$$\begin{pmatrix} q_A \rightsquigarrow v_A \rightsquigarrow F_A \\ q_B \rightsquigarrow v_B \rightarrow F_B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 = q_S \rightsquigarrow v_S = 0 \rightsquigarrow F_S = 0 \\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mit Masse } \mu}}{q_R} \rightsquigarrow v_R \rightsquigarrow F_A \end{pmatrix}$$

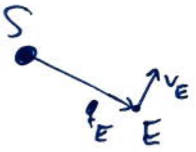
Erhaltungsgrößen

$$F_S = -\frac{q_E}{\|q_E\|^2}\gamma M_S M_E$$

$$K = p \times L - \frac{q}{\|q\|} \quad \text{Runge-Lenz-Vektor}$$

$$\dot K = \underset{F\times L}{\underset{\|}{\dot p \times L}} + p \times \underset{0}{\underset{\|}{\dot L}} - \left(\overset{\cdot}{\overbrace{q/\|q\|}}\right) = 0 \dots = 0$$

$L = q_E \times p_E$ ist senkrecht zu q_E und p_E



$$\dot L = \dot q_E \times v_E + q_E \times \dot p_E$$
$$= 0 + \underset{\nearrow}{0} = 0$$

falls $F_E \propto p_E$

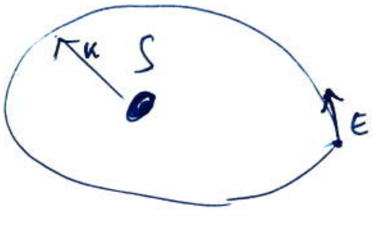
Insbesondere bewegt sich

Lemma: $K \perp L$.

Beweis: $\langle K, L\rangle = \langle p\times L, L\rangle - \langle q/\|q\|, L\rangle = 0 - 0 = 0.$

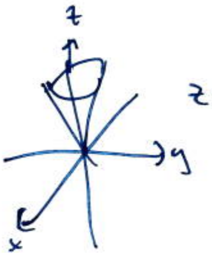
Nach Rotation: $L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} e\cos(g) \\ e\sin(g) \\ 0 \end{pmatrix}$

K zeigt in die Richtung des Perihelions.



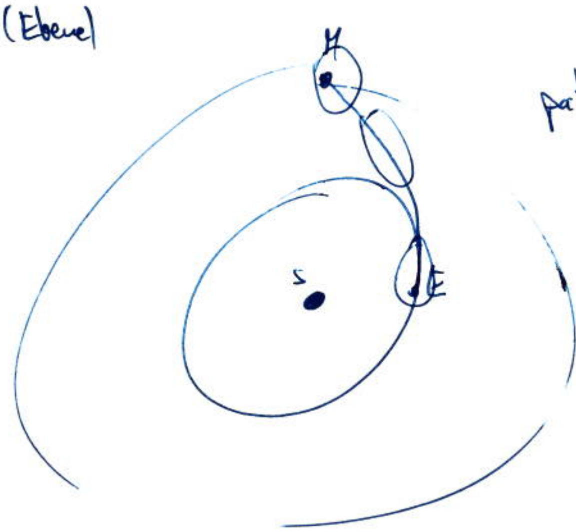
$$\langle K, \underset{\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}{\underset{\|}{q}} \rangle = re\cos(\varphi - g) = \underset{\det(p|L|q) = \|L\|^2}{\underset{\|}{\langle p \times L, q\rangle}} - \underbrace{\langle q/\|q\|, q\rangle}_{=:r}$$

$$\Longrightarrow r = \frac{\|L\|^2}{1 + e\cos(\varphi - g)}$$



$z = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Nimm $g = 0$ (Rotation des Inertialsystems).
Also $ex = \|L\|^2 - r$.
Betrachte $ex = \|L\|^2 - z$ (Ebene)



patched conics
⤵
numerisch verfeinern