Universität Augsburg
11. April 2013
Tim Baumann

Pizzaseminar zur Kategorientheorie

Lösung zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1:

a) Sei M eine Menge, $m \in M$ beliebig und $\eta : \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}$ eine natürliche Transformation. Wir wollen beweisen, dass $\eta_M(m) = m$ ist. Wir definieren dazu $1 := \{\heartsuit\}$ und $f : 1 \to M, \heartsuit \mapsto m$. Die Aussage folgt nun durch eine Diagrammjagd im Natürlichkeitsdiagramm von η:

$$\begin{tikzcd}
\heartsuit \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & f(\heartsuit) = m \arrow[dd, mapsto] \\
& 1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_1"'] & M \arrow[d, "\eta_M"] & \\
& 1 \arrow[r, "f"'] & M & \eta_M(m) \arrow[dl, equal] \\
\eta_1(\heartsuit) = \heartsuit \arrow[rr, mapsto] & & f(\heartsuit) = m &
\end{tikzcd}$$

b) Sei M eine Menge, $m \in M$ beliebig und $\omega : \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \Rightarrow K$ eine natürliche Transformation. Wir wollen wieder den gleichen Trick wie in Teilaufgabe *a)* anwenden. Dazu definieren wir wie oben $f : 1 \to M$, $\heartsuit \mapsto m$ und führen dann eine Diagrammjagd durch:

$$\begin{tikzcd}
\heartsuit \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & f(\heartsuit) = m \arrow[dd, mapsto] \\
& 1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\omega_1"'] & M \arrow[d, "\omega_M"] & \\
& 1 \times 1 \arrow[r, "f \times f"'] & M \times M & \omega_M(m) \arrow[dl, equal] \\
\omega_1(\heartsuit) = (\heartsuit, \heartsuit) \arrow[rr, mapsto] & & (m, m) &
\end{tikzcd}$$

c) Angenommen, es gäbe eine natürliche Transformation $\epsilon : P \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}$. Dann würde die Komponente $\epsilon_{\varnothing}$ von $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ nach $\varnothing$ verlaufen, also hätte die leere Menge ein Element $f(\varnothing)$. Widerspruch.

In die andere Richtung gibt es eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \Rightarrow P$ mit

$$\eta_X : X \to \mathcal{P}(X),\ x \mapsto \{x\}.$$

Wir müssen noch die Natürlichkeit überprüfen. Seien dazu X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir machen eine Diagrammjagd, dieses Mal aber um die Kommutativität des Diagramms zu beweisen:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rrr, mapsto] \arrow[dddd, mapsto] & & & f(x) \arrow[dd, mapsto] \\
& X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] & \\
& \mathcal{P}(X) \arrow[r, "{f[\cdot]}"'] & \mathcal{P}(Y) & \{f(x)\} \\
& & & \\
\{x\} \arrow[rr, mapsto] & & {f[\{x\}]} \arrow[uur, equal, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung: Es gibt noch andere natürliche Transformationen $\mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \Rightarrow P$, etwa die, jedes Element einer jeder Menge auf die leere Teilmenge schickt. In klassischer Logik gibt es dann keine weiteren natürlichen Transformationen.

d) Betrachte die Menge $M := \{1, 2\}$. Sei $f : 1 \to M$ die Funktion, die $\heartsuit$ auf das Element aus M schickt, das nicht das ausgewählte Element a_M ist. Wenn τ eine natürliche Transformation wäre, müsste folgendes Diagramm kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau_1"'] & M \arrow[d, "\tau_M"] \\
1 \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm kommutiert aber gerade nicht, da τ_M die Funktion ist, die alles konstant auf a_M schickt und wir f geschickterweise so gewählt haben, dass der Wert von f eben nicht a_M ist.

e) In der Kategorie der reellen Vektorräume gibt es für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die natürliche Transformation μ gegeben durch

$$\mu_V : V \to V,\ v \mapsto \lambda v,$$

wie man leicht nachrechnet, wenn man sich an die Eigenschaften von linearen Abbildungen erinnert.

Sind das schon alle natürliche Transformationen von $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}\text{-Vect}}$ nach $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}\text{-Vect}}$? Angenommen, wir haben eine solche natürliche Transformation η gegeben. Sei V ein reeller Vektorraum und $v \in V$ beliebig. Wir definieren die lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \to V,\ r \mapsto rv$ und betrachten das Natürlichkeitsdiagramm von η:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & f(1) = v \arrow[dd, mapsto] \\
& \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_{\mathbb{R}}"'] & V \arrow[d, "\eta_V"] & \\
& \mathbb{R} \arrow[r, "f"'] & V & \eta_V(v) \arrow[dl, equal] \\
\eta_{\mathbb{R}}(1) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \arrow[rr, mapsto] & & f(\lambda) = \lambda v &
\end{tikzcd}$$

Dadurch sehen wir, dass η tatsächlich die Form $\eta_V(v) = \lambda v$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzen muss.

Bemerkung: Die Kategorie $\mathbb{R}$-Vect ist eine sogenannte abelsche Kategorie. In jeder abelschen Kategorie wird der Monoid End(Id) der Endomorphismen der Identitätstransformation auf kanonische Art und Weise zu einem Ring. Die Argumentation zeigt dann (fast):

$$\mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}\text{-Vect}}) \cong \mathbb{R}.$$

Allgemeiner gilt das für beliebige (kommutative) Ringe R. Das ist eine Möglichkeit, folgendes Motto der Ringtheorie zu verstehen:

Studiere einen Ring dadurch, indem du seine Kategorie von Modul untersuchst!

Aufgabe 2:

a) Mit dem Lemma aus dem Skript, dass Kategorienäquivalenzen volltreu und wesentlich surjektiv sind, lassen sich diese und viele weitere ähnliche Aussagen elegant beweisen:

Sei 0 initiales Objekt in $\mathcal{C}$ und $X \in \mathrm{Ob}\, D$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass FX initial in $\mathcal{D}$ ist, es also genau einen Morphismus von $F0$ nach X gibt. Da X isomorph zu FGX und der Funktor F volltreu ist, haben wir eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}(F0, X) \cong \mathrm{Hom}(F0, FGX) \cong \mathrm{Hom}(0, GX).$$

Weil 0 initial ist, enthält die rechte Hom-Menge und somit auch die linke Hom-Menge genau einen Morphismus.

b) Wir bezeichnen die Kategorie der Möchtegern-Produkte von X und Y mit $\mathrm{MP}_{X,Y}$, die der Möchtegernprodukte von Y und X mit $\mathrm{MP}_{Y,X}$. Da Möchtegern-Produkte von X und Y aus Symmetriegründen auch Möchtegernprodukte von Y und X sind (genauer:

als solche angesehen werden können), können wir den Funktor $F : \mathrm{MP}_{X,Y} \to \mathrm{MP}_{Y,X}$ definieren:

$$\left(X \xleftarrow{\pi_X} Q \xrightarrow{\pi_Y} Y \right) \longmapsto \left(Y \xleftarrow{\pi_Y} Q \xrightarrow{\pi_X} X \right)$$

$$\left(\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"] & \\ X & & Y \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right) \longmapsto \left(\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"] & \\ Y & & X \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right)$$

Den zu F quasi-inversen Funktor $G : \mathrm{MP}_{Y,X} \to \mathrm{MP}_{X,Y}$ definieren wir genau spiegelverkehrt zu F. Wie man leicht nachprüft, ergeben F und G eine Äquivalenz von $\mathrm{MP}_{X,Y}$ und $\mathrm{MP}_{Y,X}$, wobei die natürlichen Transformationen zwischen F und G nur aus den Identitätsmorphismen bestehen.

Ein initiales Objekt in $\mathrm{MP}_{X,Y}$ ist ein Produkt von X und Y, ein initiales Objekt in $\mathrm{MP}_{Y,X}$ ein Produkt von Y und X. Mit Teilaufgabe a) folgt, dass ein Produkt von X und Y auch ein Produkt von Y und X ist und umgekehrt.

Aufgabe 3:

Wähle für jeden endlich-dimensionalen Vektorraum V eine feste Basis $(b_1, \ldots, b_{\dim V})$ und definiere das Koordinatensystem η_V bezüglich dieser Basis durch die Setzung

$$\eta_V : \mathbb{R}^{\dim V} \to V,\ e_i \mapsto b_i.$$

Zwischen der Numerikerkategorie $\mathcal{C}$ und der $\mathbb{R}\text{-Vect}_{\mathrm{fd}}$ verlaufen die Funktoren

$$\begin{array}{cclcl} F & : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}\text{-Vect}_{\mathrm{fd}} \\ & & \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R}^n \\ & & M \in \mathbb{R}^{m \times n} & \longmapsto & \text{die von der Matrix } M \text{ dargestellte lineare Abbildung} \\ & & & & \text{zwischen } \mathbb{R}^n \text{ und } \mathbb{R}^m \text{ bezüglich der kanonischen Basen} \end{array}$$

$$\begin{array}{cclcl} G & : & \mathbb{R}\text{-Vect}_{\mathrm{fd}} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & & V & \longmapsto & \mathbb{R}^{\dim V} \\ & & (f : V \to W) & \longmapsto & \eta_W^{-1} \circ f \circ \eta_V \text{ (bzw. die Matrix dieser Abbildung).} \end{array}$$

Diese Funktoren bilden eine Äquivalenz zwischen den beiden Kategorien, da folgende Natürlichkeitsdiagramme für alle $(V \xrightarrow{f} W) \in \mathbb{R}\text{-Vect}_{\mathrm{fd}}$ bzw. $(\mathbb{R}^n \xrightarrow{M} \mathbb{R}^m) \in \mathcal{C}$ offensichtlicherweise kommutieren:

$$\begin{tikzcd} GFV \arrow[r, "GFM = \eta_W^{-1} \circ M \circ \eta_V"] \arrow[d, "\eta_V"'] & GFW \arrow[d, "\eta_W"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "M"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FGV \arrow[r, "FGf = \eta_W^{-1} \circ f \circ \eta_V"] \arrow[d, "\eta_V"'] & FGW \arrow[d, "\eta_W"] \\ V \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}$$

Projektaufgabe:

Wir haben einen Morphismus $\varphi : A \to B$ gegeben und wollen eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, A) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, B)$ finden, d. h. es muss für alle $f : Y \to X$ aus $\mathcal{C}$ das Natürlichkeitsdiagramm kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \arrow[r, "g \mapsto g \circ f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) \arrow[d, "\eta_Y"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B) \arrow[r, "g \mapsto g \circ f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, B)
\end{tikzcd}$$

Wir setzen $\eta_Z := (g \mapsto \phi \circ g)$. Wenn wir nun einen Morphismus $p : X \to A$ im Diagramm von oben links nach unten rechts verfolgen, erhalten wir einerseits $((\varphi \circ p) \circ f)$ und andererseits $(\varphi \circ (p \circ f))$. Aufgrund der Assoziativität der Verknüpfung von Morphismen sind diese Ergebnisse gleich und das Diagramm kommutiert wie gewünscht.