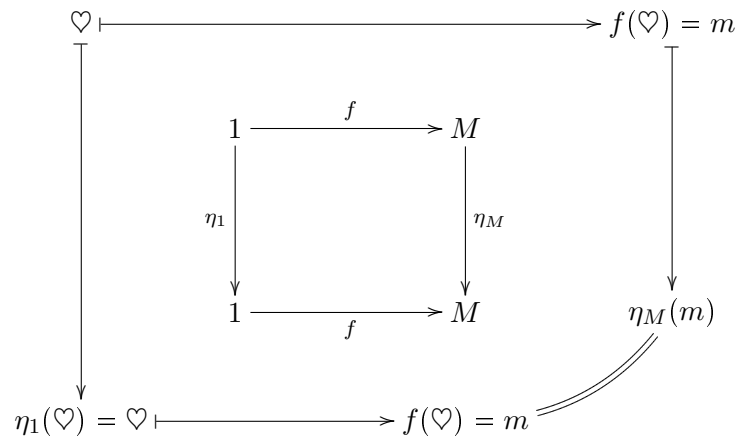


Pizzaseminar zur Kategorientheorie

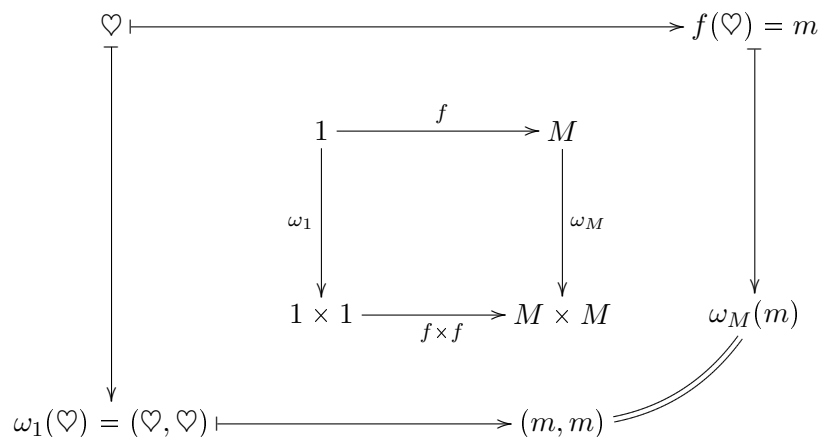
Lösung zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1:

- a) Sei M eine Menge, $m \in M$ beliebig und $\eta : \text{Id}_{\text{Set}} \Rightarrow \text{Id}_{\text{Set}}$ eine natürliche Transformation. Wir wollen beweisen, dass $\eta_M(m) = m$ ist. Wir definieren dazu $1 := \{\heartsuit\}$ und $f : 1 \rightarrow M, \heartsuit \mapsto m$. Die Aussage folgt nun durch eine Diagrammjagd im Natürlichkeitsdiagramm von η :



- b) Sei M eine Menge, $m \in M$ beliebig und $\omega : \text{Id}_{\text{Set}} \Rightarrow K$ eine natürliche Transformation. Wir wollen wieder den gleichen Trick wie in Teilaufgabe a) anwenden. Dazu definieren wir wie oben $f : 1 \rightarrow M, \heartsuit \mapsto m$ und führen dann eine Diagrammjagd durch:

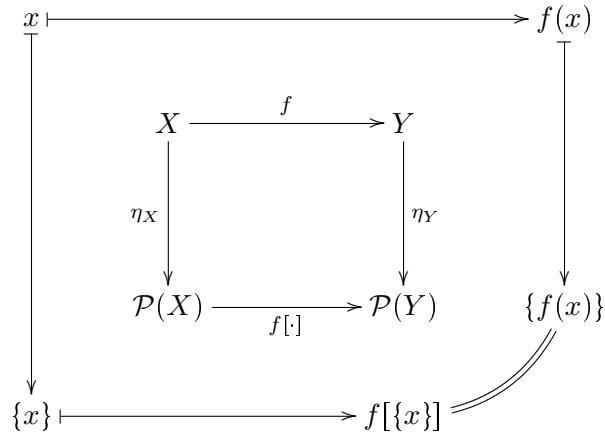


- c) Angenommen, es gäbe eine natürliche Transformation $\epsilon : P \Rightarrow \text{Id}_{\text{Set}}$. Dann würde die Komponente ϵ_{\emptyset} von $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ nach \emptyset verlaufen, also hätte die leere Menge ein Element $f(\emptyset)$. Widerspruch.

In die andere Richtung gibt es eine natürliche Transformation $\eta : \text{Id}_{\text{Set}} \Rightarrow P$ mit

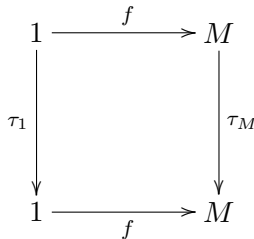
$$\eta_X : X \rightarrow \mathcal{P}(X), x \mapsto \{x\}.$$

Wir müssen noch die Natürlichkeit überprüfen. Seien dazu X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir machen eine Diagrammjagd, dieses Mal aber um die Kommutativität des Diagramms zu beweisen:



Bemerkung: Es gibt noch andere natürliche Transformationen $\text{Id}_{\text{Set}} \Rightarrow P$, etwa die, jedes Element einer jeder Menge auf die leere Teilmenge schickt. In klassischer Logik gibt es dann keine weiteren natürlichen Transformationen.

- d) Betrachte die Menge $M := \{1, 2\}$. Sei $f : 1 \rightarrow M$ die Funktion, die \heartsuit auf das Element aus M schickt, das nicht das ausgewählte Element a_M ist. Wenn τ eine natürliche Transformation wäre, müsste folgendes Diagramm kommutieren:



Dieses Diagramm kommutiert aber gerade nicht, da τ_M die Funktion ist, die alles konstant auf a_M schickt und wir f geschickterweise so gewählt haben, dass der Wert von f eben nicht a_M ist.

- e) In der Kategorie der reellen Vektorräume gibt es für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die natürliche Transformation μ gegeben durch

$$\mu_V : V \rightarrow V, v \mapsto \lambda v,$$

wie man leicht nachrechnet, wenn man sich an die Eigenschaften von linearen Abbildungen erinnert.

Sind das schon alle natürliche Transformationen von $\text{Id}_{\mathbb{R}\text{-Vect}}$ nach $\text{Id}_{\mathbb{R}\text{-Vect}}$? Angenommen, wir haben eine solche natürliche Transformation η gegeben. Sei V ein reeller Vek-

torraum und $v \in V$ beliebig. Wir definieren die lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow V$, $r \mapsto rv$ und betrachten das Natürlichkeitsdiagramm von η :

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{\quad} & f(1) = v \\
 \downarrow \eta_{\mathbb{R}} & & \downarrow \eta_V \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & V \\
 \downarrow \eta_{\mathbb{R}} & & \downarrow \eta_V \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & V \\
 \downarrow \eta_{\mathbb{R}} & & \downarrow \eta_V \\
 \eta_{\mathbb{R}}(1) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & f(\lambda) = \lambda v
 \end{array}$$

Dadurch sehen wir, dass η tatsächlich die Form $\eta_V(v) = \lambda v$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzen muss.

Bemerkung: Die Kategorie $\mathbb{R}\text{-Vect}$ ist eine sogenannte abelsche Kategorie. In jeder abelschen Kategorie wird der Monoid $\text{End}(\text{Id})$ der Endomorphismen der Identitätstransformation auf kanonische Art und Weise zu einem Ring. Die Argumentation zeigt dann (fast):

$$\text{End}(\text{Id}_{\mathbb{R}\text{-Vect}}) \cong \mathbb{R}.$$

Allgemeiner gilt das für beliebige (kommutative) Ringe R . Das ist eine Möglichkeit, folgendes Motto der Ringtheorie zu verstehen:

Studiere einen Ring dadurch, indem du seine Kategorie von Modul untersuchst!

Aufgabe 2:

- a) Mit dem Lemma aus dem Skript, dass Kategorienäquivalenzen volltreu und wesentlich surjektiv sind, lassen sich diese und viele weitere ähnliche Aussagen elegant beweisen:

Sei 0 initiales Objekt in \mathcal{C} und $X \in \text{Ob } \mathcal{D}$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass FX initial in \mathcal{D} ist, es also genau einen Morphismus von $F0$ nach X gibt. Da X isomorph zu FGX und der Funktor F volltreu ist, haben wir eine Bijektion

$$\text{Hom}(F0, X) \cong \text{Hom}(F0, FGX) \cong \text{Hom}(0, GX).$$

Weil 0 initial ist, enthält die rechte Hom-Menge und somit auch die linke Hom-Menge genau einen Morphismus.

- b) Wir bezeichnen die Kategorie der Möchtegern-Produkte von X und Y mit $\text{MP}_{X,Y}$, die der Möchtegernprodukte von Y und X mit $\text{MP}_{Y,X}$. Da Möchtegern-Produkte von X und Y aus Symmetriegründen auch Möchtegernprodukte von Y und X sind (genauer:

als solche angesehen werden können), können wir den Funktor $F : \text{MP}_{X,Y} \rightarrow \text{MP}_{Y,X}$ definieren:

$$\left(X \xleftarrow{\pi_X} Q \xrightarrow{\pi_Y} Y \right) \mapsto \left(Y \xleftarrow{\pi_Y} Q \xrightarrow{\pi_X} X \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} & Q & \\ \swarrow & \downarrow f & \searrow \\ X & & Y \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ & R & \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} & Q & \\ \swarrow & \downarrow f & \searrow \\ Y & & X \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ & R & \end{array} \right)$$

Den zu F quasi-inversen Funktor $G : \text{MP}_{Y,X} \rightarrow \text{MP}_{X,Y}$ definieren wir genau spiegelverkehrt zu F . Wie man leicht nachprüft, ergeben F und G eine Äquivalenz von $\text{MP}_{X,Y}$ und $\text{MP}_{Y,X}$, wobei die natürlichen Transformationen zwischen F und G nur aus den Identitätsmorphisismen bestehen.

Ein initiales Objekt in $\text{MP}_{X,Y}$ ist ein Produkt von X und Y , ein initiales Objekt in $\text{MP}_{Y,X}$ ein Produkt von Y und X . Mit Teilaufgabe a) folgt, dass ein Produkt von X und Y auch ein Produkt von Y und X ist und umgekehrt.

Aufgabe 3:

Wähle für jeden endlich-dimensionalen Vektorraum V eine feste Basis $(b_1, \dots, b_{\dim V})$ und definiere das Koordinatensystem η_V bezüglich dieser Basis durch die Setzung

$$\eta_V : \mathbb{R}^{\dim V} \rightarrow V, e_i \mapsto b_i.$$

Zwischen der Numerikerkategorie \mathcal{C} und der $\mathbb{R}\text{-Vect}_{\text{fd}}$ verlaufen die Funktoren

$$F : \begin{array}{ll} \mathcal{C} & \longrightarrow \mathbb{R}\text{-Vect}_{\text{fd}} \\ \mathbb{R}^n & \longmapsto \mathbb{R}^n \\ M \in \mathbb{R}^{m \times n} & \longmapsto \text{die von der Matrix } M \text{ dargestellte lineare Abbildung} \\ & \text{zwischen } \mathbb{R}^n \text{ und } \mathbb{R}^m \text{ bezüglich der kanonischen Basen} \end{array}$$

$$G : \begin{array}{ll} \mathbb{R}\text{-Vect}_{\text{fd}} & \longrightarrow \mathcal{C} \\ V & \longmapsto \mathbb{R}^{\dim V} \\ (f : V \rightarrow W) & \longmapsto \eta_W^{-1} \circ f \circ \eta_V \text{ (bzw. die Matrix dieser Abbildung)}. \end{array}$$

Diese Funktoren bilden eine Äquivalenz zwischen den beiden Kategorien, da folgende Natürlichkeitsdiagramme für alle $(V \xrightarrow{f} W) \in \mathbb{R}\text{-Vect}_{\text{fd}}$ bzw. $(\mathbb{R}^n \xrightarrow{M} \mathbb{R}^m) \in \mathcal{C}$ offensichtlich kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} GFV & \xrightarrow{GFM = \eta_W^{-1} \circ M \circ \eta_V} & GFW \\ \eta_V \downarrow & & \downarrow \eta_W \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{M} & \mathbb{R}^m \end{array} \quad \begin{array}{ccc} FGV & \xrightarrow{FGf = \eta_W^{-1} \circ f \circ \eta_V} & FGW \\ \eta_V \downarrow & & \downarrow \eta_W \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Projektaufgabe:

Wir haben einen Morphismus $\varphi : A \rightarrow B$ gegeben und wollen eine natürliche Transformation $\eta : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(_, A) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(_, B)$ finden, d.h. es muss für alle $f : Y \rightarrow X$ aus \mathcal{C} das Natürlichkeitsdiagramm kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) & \xrightarrow{g \mapsto g \circ f} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B) & \xrightarrow{g \mapsto g \circ f} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, B) \end{array}$$

Wir setzen $\eta_Z := (g \mapsto \varphi \circ g)$. Wenn wir nun einen Morphismus $p : X \rightarrow A$ im Diagramm von oben links nach unten rechts verfolgen, erhalten wir einerseits $((\varphi \circ p) \circ f)$ und andererseits $(\varphi \circ (p \circ f))$. Aufgrund der Assoziativität der Verknüpfung von Morphismen sind diese Ergebnisse gleich und das Diagramm kommutiert wie gewünscht.