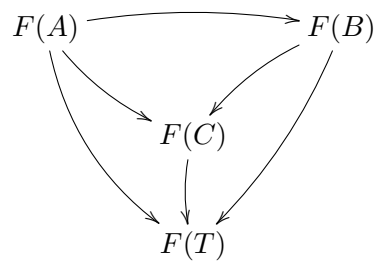


Pizzaseminar zur Kategorientheorie

Lösung zum 5. Übungsblatt

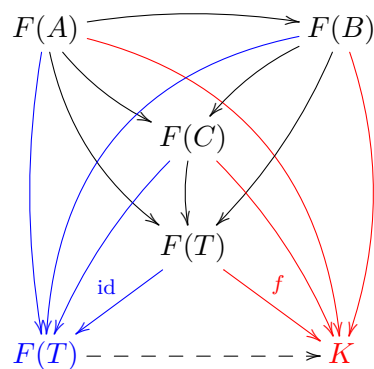
Aufgabe 1.

Wie sieht ein Diagramm $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ mit terminalem Objekt T in \mathcal{D} aus? Beispielsweise so:



Die Behauptung ist zunächst, dass $F(T)$ Kokegel dieses Diagramms ist. Dazu müssen wir erstmal angeben, mit welchen Morphismen $F(T)$ zum Kokegel wird, also für alle $X \in \text{Ob } \mathcal{D}$ einen Morphismus von $F(X)$ nach $F(T)$ finden. Hierzu nutzen wir aus, dass T terminal in \mathcal{D} ist, es also einen eindeutigen Morphismus $f_X : X \rightarrow T$ für alle $X \in \text{Ob } \mathcal{D}$ gibt. Wenn wir nun F auf f_X anwenden, haben wir einen solchen Morphismus. Alle relevanten Dreiecke kommutieren, da sie schon in \mathcal{D} kommutieren. Insbesondere haben wir zwischen $F(T)$ (im obigen Diagramm) und $F(T)$ (unserer Kokegelspitze) der Identitätsmorphismus $\text{id}_{F(T)}$. Effektiv haben wir einen Teil des Diagramms dupliziert.

Als nächstes müssen wir die universelle Eigenschaft nachprüfen. Sei dazu K mit geeigneten Morphismen eine weiterer Kokegel, wie im folgenden Diagramm dargestellt:



Wir sollen zeigen, dass es für den gestrichelten Morphismus im Diagramm genau eine Möglichkeit gibt. Die Eindeutigkeit ist einfach: wenn es einen solchen Morphismus g gibt, dann bringt er insbesondere das unterste Dreieck im obigen Diagramm, bestehend aus den zwei beschrifteten Morphismen und dem gestrichelten Morphismus, zum Kommutieren, was ausgeschrieben soviel bedeutet wie

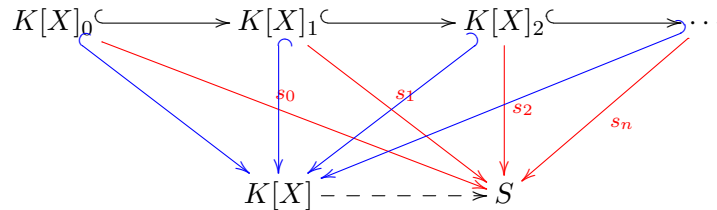
$$f = g \circ \text{id}_{F(T)} = g.$$

Der Morphismus f lässt in der Tat alle Dreiecke bestehend aus blauem, roten und gestrichelten Morphismus ($= f$) kommutieren: Denn alle blauen Morphismen im obigen Diagramm

befinden sich auch als schwarze Morphismen im Diagramm und alle blau-rot-gestrichelten Dreiecke sind auch schon einmal als schwarz-rot-rote Dreiecke im Diagramm, die nach Annahme kommutieren.

Aufgabe 2.

- a) Der Vektorraum $K[X]$ wird offensichtlich mit den Inklusionsabbildungen zu einem Kokegel des Diagramms. Angenommen, es gibt einen weiteren Kokegel S mit dazu gehörenden linearen Abbildungen $s_n : K[X]_n \rightarrow S$ über dem Diagramm:



Die Behauptung ist nun, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $K[X] \xrightarrow{u} S$ gibt, die obiges Diagramm kommutieren lässt. Die Kommutativität des linken blau-rot-gestrichelten Dreiecks bedeutet, dass u , wenn existent, für Polynome 0-ten Grades (konstante Polynome) mit s_0 übereinstimmen muss, die Kommutativität des nächsten blau-rot-gestrichelten Dreiecks besagt, dass u für Polynome mit Grad 1 mit s_1 übereinstimmen muss usw. Wenn u existiert, muss es also folgende Definition haben:

$$u(p) := s_n(p), \text{ wobei } n \text{ der Grad des Polynoms } p \text{ sei}$$

Das so definierte u ist sogar linear, wie folgende Überlegung zeigt: Die Inklusionsabbildungen s_n sind abwärtskompatibel in dem Sinne, dass für alle $m \geq n$ gilt:

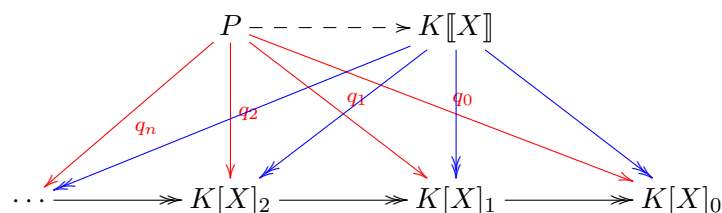
$$s_m|_{K[X]_n} = s_n.$$

Dies folgt aus der Kommutativität der schwarz-rot-roten Dreiecke. Seien nun $p_1, p_2 \in K[X]$ beliebige Polynome mit Grad n und \tilde{n} . Dann ist der Grad m von $p_1 + p_2$ höchstens $\max\{n, \tilde{n}\}$. Es folgt mit der Abwärtskompatibilität wie gewünscht

$$\begin{aligned} u(p_1) + u(p_2) &= s_n(p_1) + s_{\tilde{n}}(p_2) = s_{\max\{n, \tilde{n}\}}(p_1) + s_{\max\{n, \tilde{n}\}}(p_2) \\ &= s_{\max\{n, \tilde{n}\}}(p_1 + p_2) = s_m(p_1 + p_2) = u(p_1 + p_2) \end{aligned}$$

Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass u mit der Skalarmultiplikation verträglich ist. Somit ist u tatsächlich linear und eindeutig mit der Eigenschaft, obiges Diagramm kommutieren zu lassen.

- b) Der Vektorraum der formalen Potenzreihen $K[[X]]$ wird zu einem Kegel des Diagramms mit den linearen Abbildungen $k_n : K[[X]] \rightarrow K[X]_n$, die von einer formalen Potenzreihe nur die Monome mit Grad $\leq n$ nehmen. Angenommen, Q ist ein weiterer Kegel mit Abbildungen $q_n : P \rightarrow K[X]_n$ über dem Diagramm:



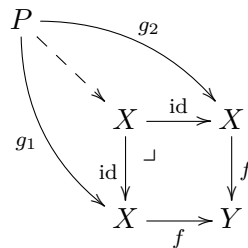
Zu zeigen ist, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $K[X] \xrightarrow{u} S$ gibt, die obiges Diagramm kommutieren lässt. Angenommen, es gibt so ein u . Betrachte zunächst das blau-rot-gestrichelte Dreieck mit $K[X]_0$ ganz rechts. Dessen Kommutativität sagt, dass für jedes $p \in P$ der erste Term der formalen Potenzreihe $u(p)$ mit $q_0(p)$ übereinstimmt, die Kommutativität des blau-rot-gestrichelten mit $K[X]_1$, dass außerdem der zweite Term von $u(p)$ mit dem zweiten Term von $q_1(p)$ übereinstimmt usw. Oder, anders ausgedrückt, u muss folgende Identität erfüllen:

$$u(p) = q_0(p) + \sum_{n=1}^{\infty} (q_n(p) - q_{n-1}(p))$$

Eine so festgelegte Abbildung u ist wohldefiniert und die einzige lineare Abbildung, die obiges Diagramm kommutieren lässt. Somit ist $K[[X]]$ Limes des Diagramms.

Aufgabe 3.

- a) Angenommen, $f : X \rightarrow Y$ ist ein Monomorphismus. Wir stellen zunächst fest, dass das Diagramm aus der Angabe offensichtlich kommutiert, also ein Möchtegern-Faserprodukt-Diagramm ist. Sei nun P ein weiteres Möchtegern-Faserprodukt.



Daraus, dass das äußere Diagramm kommutiert, dürfen wir schließen, dass

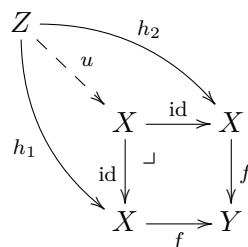
$$f \circ g_1 = f \circ g_2$$

und weil f Monomorphismus ist, folgt $g_1 = g_2$. Wenn wir im obigen Diagramm für den gestrichelten Pfeil g_1 (a. k. a. g_2) einsetzen, kommutiert das Diagramm. Das ist auch die einzige Wahl, die wir haben, denn die Kommutativität des linken Dreiecks sagt ausgeschrieben

$$g_1 = \text{id}_X \circ \varphi = \varphi,$$

wobei φ den gestrichelten Morphismus bezeichnet.

Falls umgekehrt das Diagramm aus der Angabe ein Faserprodukt-Diagramm ist, so wollen wir folgern, dass f ein Monomorphismus ist. Seien dazu ein Objekt Z und Morphismen $h_1, h_2 : Z \rightarrow X$ mit $f \circ h_1 = f \circ h_2$ gegeben. Das Objekt Z wird damit zu einem Möchtegern-Faserprodukt:



Die universelle Eigenschaft liefert uns einen eindeutigen Morphismus $u : Z \rightarrow X$ mit

$$\text{id}_X \circ u = h_1 \text{ sowie } \text{id}_X \circ u = h_2,$$

also $h_1 = h_2$.

b) TODO: Beweis hier einfügen

Aufgabe 4.

TODO