Universität Augsburg
12. April 2013
Tim Baumann

# **Pizzaseminar zur Kategorientheorie**
## Lösung zum 5. Übungsblatt

### **Aufgabe 1.**

Wie sieht ein Diagramm $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ mit terminalem Objekt $T$ in $\mathcal{D}$ aus? Beispielsweise so:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[rr, bend left=10] \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right] & & F(B) \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
& F(C) \arrow[d] & \\
& F(T) &
\end{tikzcd}$$

Die Behauptung ist zunächst, dass $F(T)$ Kokegel dieses Diagramms ist. Dazu müssen wir erstmal angeben, mit welchen Morphismen $F(T)$ zum Kokegel wird, also für alle $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ einen Morphismus von $F(X)$ nach $F(T)$ finden. Hierzu nutzen wir aus, dass $T$ terminal in $\mathcal{D}$ ist, es also einen eindeutigen Morphismus $f_X : X \to T$ für alle $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ gibt. Wenn wir nun $F$ auf $f_X$ anwenden, haben wir einen solchen Morphismus. Alle relevanten Dreiecke kommutieren, da sie schon in $\mathcal{D}$ kommutieren. Insbesondere haben wir zwischen $F(T)$ (im obigen Diagramm) und $F(T)$ (unserer Kokegelspitze) der Identitätsmorphismus $\mathrm{id}_{F(T)}$. Effektiv haben wir einen Teil des Diagramms dupliziert.

Als nächstes müssen wir die universelle Eigenschaft nachprüfen. Sei dazu $K$ mit geeigneten Morphismen eine weiterer Kokegel, wie im folgenden Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[rr, bend left=10] \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right] \arrow[ddd, blue] \arrow[dddrr, red, bend left] & & F(B) \arrow[dl] \arrow[ddl] \arrow[dddll, blue, bend right] \arrow[ddd, red] \\
& F(C) \arrow[d] \arrow[ddl, blue] \arrow[ddr, red] & \\
& F(T) \arrow[dl, blue, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, red, "f"] & \\
\color{blue}{F(T)} \arrow[rr, dashed] & & \color{red}{K}
\end{tikzcd}$$

Wir sollen zeigen, dass es für den gestrichelten Morphismus im Diagramm genau eine Möglichkeit gibt. Die Eindeutigkeit ist einfach: wenn es einen solchen Morphismus $g$ gibt, dann bringt er insbesondere das unterste Dreieck im obigen Diagramm, bestehend aus den zwei beschrifteten Morphismen und dem gestrichelten Morphismus, zum Kommutieren, was ausgeschrieben soviel bedeutet wie

$$f = g \circ \mathrm{id}_{F(T)} = g.$$

Der Morphismus $f$ lässt in der Tat alle Dreiecke bestehend aus blauem, roten und gestrichelten Morphismus $(= f)$ kommutieren: Denn alle blauen Morphismen im obigen Diagramm befinden sich auch als schwarze Morphismen im Diagramm und alle blau-rot-gestrichelten Dreiecke sind auch schon einmal als schwarz-rot-rote Dreiecke im Diagramm, die nach Annahme kommutieren.

**Aufgabe 2.**

a) Der Vektorraum $K[X]$ wird offensichtlich mit den Inklusionsabbildungen zu einem Kokegel des Diagramms. Angenommen, es gibt einen weiteren Kokegel $S$ mit dazugehörenden linearen Abbildungen $s_n : K[X]_n \to S$ über dem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
K[X]_0 \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[drr, "s_0"] & K[X]_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "s_1"] & K[X]_2 \arrow[r, hook] \arrow[dl, hook] \arrow[d, "s_2"] & \cdots \arrow[dll, hook] \arrow[dl, "s_n"] \\
 & K[X] \arrow[r, dashed] & S &
\end{tikzcd}$$

Die Behauptung ist nun, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $K[X] \overset{u}{\dashrightarrow} S$ gibt, die obiges Diagramm kommutieren lässt. Die Kommutativität des linken blau-rot-gestrichelten Dreiecks bedeutet, dass $u$, wenn existent, für Polynome 0-ten Grades (konstante Polynome) mit $s_0$ übereinstimmen muss, die Kommutativitäts des nächsten blau-rot-gestrichelten Dreiecks besagt, dass $u$ für Polynome mit Grad 1 mit $s_1$ übereinstimmen muss usw. Wenn $u$ existiert, muss es also folgende Definition haben:

$$u(p) := s_n(p), \text{ wobei } n \text{ der Grad des Polynoms } p \text{ sei}$$

Das so definierte $u$ ist sogar linear, wie folgende Überlegung zeigt: Die Inklusionsabbildungen $s_n$ sind abwärtskompatibel in dem Sinne, dass für alle $m \geq n$ gilt:

$$s_m|_{K[X]_n} = s_n.$$

Dies folgt aus der Kommutativität der schwarz-rot-roten Dreiecke. Seien nun $p_1, p_2 \in K[X]$ beliebige Polynome mit Grad $n$ und $\widetilde{n}$. Dann ist der Grad $m$ von $p_1 + p_2$ höchstens $\max\{n, \widetilde{n}\}$. Es folgt mit der Abwärtskompatibilität wie gewünscht

$$\begin{aligned} u(p_1) + u(p_2) &= s_n(p_1) + s_{\widetilde{n}}(p_2) = s_{\max\{n,\widetilde{n}\}}(p_1) + s_{\max\{n,\widetilde{n}\}}(p_2) \\ &= s_{\max\{n,\widetilde{n}\}}(p_1 + p_2) = s_m(p_1 + p_2) = u(p_1 + p_2) \end{aligned}$$

Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass $u$ mit der Skalarmultiplikation verträglich ist. Somit ist $u$ tatsächlich linear und eindeutig mit der Eigenschaft, obiges Diagramm kommutieren zu lassen.

b) Der Vektorraum der formalen Potenzreihen $K[\![X]\!]$ wird zu einem Kegel des Diagramms mit den linearen Abbildungen $k_n : K[\![X]\!] \to K[X]_n$, die von einer formalen Potenzreihe nur die Monome mit Grad $\leq n$ nehmen. Angenommen, $Q$ ist ein weiterer Kegel mit Abbildungen $q_n : P \to K[X]_n$ über dem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[r, dashed] \arrow[dl, "q_n"'] \arrow[d, "q_2"] \arrow[dr, "q_1"] \arrow[drr, "q_0"] & K[\![X]\!] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\cdots \arrow[r, two heads] & K[X]_2 \arrow[r, two heads] & K[X]_1 \arrow[r, two heads] & K[X]_0
\end{tikzcd}$$

Zu zeigen ist, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $K[X] \overset{u}{\dashrightarrow} S$ gibt, die obiges Diagramm kommutieren lässt. Angenommen, es gibt so ein $u$. Betrachte zunächst das blau-rot-gestrichelte Dreieck mit $K[X]_0$ ganz rechts. Dessen Kommutativität sagt, dass für jedes $p \in P$ der erste Term der formalen Potenzreihe $u(p)$ mit $q_0(p)$ übereinstimmt, die Kommutativität des blau-rot-gestrichelten mit $K[X]_1$, dass außerdem der zweite Term von $u(p)$ mit dem zweiten Term von $q_1(p)$ übereinstimmt usw. Oder, anders ausgedrückt, $u$ muss folgende Identität erfüllen:

$$u(p) = q_0(p) + \sum_{n=1}^{\infty} (q_n(p) - q_{n-1}(p))$$

Eine so festgelegte Abbildung $u$ ist wohldefiniert und die einzige lineare Abbildung, die obiges Diagramm kommutieren lässt. Somit ist $K[\![X]\!]$ Limes des Diagramms.

**Aufgabe 3.**

a) Angenommen, $f : X \to Y$ ist ein Monomorphismus. Wir stellen zunächst fest, dass das Diagramm aus der Angabe offensichtlich kommutiert, also ein Möchtegern-Faserproduktdiagramm ist. Sei nun $P$ ein weiteres Möchtegern-Faserprodukt.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "g_2"] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] & & \\
& X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Daraus, dass das äußere Diagramm kommutiert, dürfen wir schließen, dass

$$f \circ g_1 = f \circ g_2$$

und weil $f$ Monomorphismus ist, folgt $g_1 = g_2$. Wenn wir im obigen Diagramm für den gestrichelten Pfeil $g_1$ (a. k. a. $g_2$) einsetzen, kommutiert das Diagramm. Das ist auch die einzige Wahl, die wir haben, denn die Kommutativität des linken Dreiecks sagt ausgeschrieben

$$g_1 = \mathrm{id}_X \circ \varphi = \varphi,$$

wobei $\varphi$ den gestrichelten Morphismus bezeichnet.

Falls umgekehrt das Diagramm aus der Angabe ein Faserproduktdiagramm ist, so wollen wir folgern, dass $f$ ein Monomorphismus ist. Seien dazu ein Objekt $Z$ und Morphismen $h_1, h_2 : Z \to X$ mit $f \circ h_1 = f \circ h_2$ gegeben. Das Objekt $Z$ wird damit zu einem Möchtegern-Faserprodukt:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \\
& X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft liefert uns einen eindeutigen Morphismus $u : Z \to X$ mit

$$\mathrm{id}_X \circ u = h_1 \text{ sowie } \mathrm{id}_X \circ u = h_2,$$

also $h_1 = h_2$.

b) TODO: Beweis hier einfügen

**Aufgabe 4.**

TODO