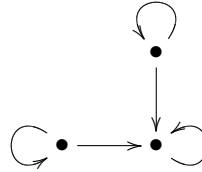


Pizzaseminar zur Kategorientheorie 1. Übungsblatt

- Aufgabe 1:** a) Gib die Kategorie zu deinem Lieblingsgebiet an: Was sind ihre Objekte, was ihre Morphismen? Was sind ihre initialen und terminalen Objekte?
b) Gib eine formale Definition folgender Kategorie:



Was genau sind also die Objekte und die Morphismen? Wie lautet die Kompositionsvorschrift?

- c) Zeige: Identitätsmorphismen in Kategorien sind eindeutig, d. h. sind id_X und $\tilde{\text{id}}_X$ beides Identitätsmorphismen für ein Objekt X einer Kategorie \mathcal{C} , so gilt $\text{id}_X = \tilde{\text{id}}_X$.

Aufgabe 2: Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen Mengen.

- a) Zeige: Es ist f genau dann ein Monomorphismus, wenn f injektiv ist.
b) Zeige: Es ist f genau dann ein Epimorphismus, wenn f surjektiv ist.

Tipp: Widerspruchsbeweis oder geeignete Abbildungen nach $\mathcal{P}(\{\star\}) = \{\emptyset, \{\star\}\}$ betrachten.

Aufgabe 3: Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Morphismen einer beliebigen Kategorie \mathcal{C} .

- a) Zeige: Ist $g \circ f$ ein Monomorphismus, so ist auch f ein Monomorphismus.
b) Dein Beweis von a) funktioniert in allen Kategorien, daher auch in \mathcal{C}^{op} . Was besagt er dann?

Aufgabe 4: Ein *Isomorphismus* $f : X \rightarrow Y$ in einer Kategorie ist ein Morphismus, zu dem es einen Morphismus $g : Y \rightarrow X$ mit

$$g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

gibt. Statt „ g “ schreibt man auch „ f^{-1} “.

- a) Zeige: Die Isomorphismen in der Kategorie der Gruppen sind genau die üblichen Gruppenisomorphismen.
b) Zeige: In beliebigen Kategorien sind Isomorphismen stets Mono- und Epimorphismen, aber die Umkehrung gilt nicht.

Tipp: Für die Rückrichtung kann man ein Gegenbeispiel in einer überschaubaren Kategorie angeben.

Aufgabe 5: Sei G eine Gruppe. Bastele auf sinnvolle Art und Weise aus G eine Kategorie – so, dass die Gruppenverknüpfung eine Rolle spielt. (Diese Kategorie wird oft mit „ BG “ bezeichnet und ist in der algebraischen Topologie wichtig.)