

## Pizzaseminar zur Kategorientheorie 3. Übungsblatt

**Aufgabe 1:** „Funktooren bewahren Isomorphie“: Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor zwischen Kategorien  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  und seien  $X$  und  $Y$  Objekte von  $\mathcal{C}$ . Zeige:

$$X \cong Y \implies F(X) \cong F(Y).$$

Zeige ferner, dass die Umkehrung ebenfalls gilt, wenn  $F$  voll und treu ist (siehe Aufgabe 3).

**Aufgabe 2:** Sei  $f : P \rightarrow Q$  eine *monotone* Abbildung zwischen Quasiordnungen  $P$ ,  $Q$ , d. h. für alle  $x, y \in P$  gilt

$$x \leq y \text{ in } P \implies f(x) \sqsubseteq f(y) \text{ in } Q.$$

Überlege, wie man daraus einen Funktor  $BP \rightarrow BQ$  der zugehörigen Kategorien aus Aufgabe 3 von Blatt 2 basteln kann. Wieso sind die Funktoraxiome erfüllt?

**Aufgabe 3:** Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt...

- treu*, wenn für je zwei parallele Morphismen  $f, g$  in  $\mathcal{C}$  (d. h. Morphismen mit gleicher Quelle und gleichem Ziel) gilt:  $F(f) = F(g) \implies f = g$ .
- voll*, wenn es für alle Objekte  $X, Y \in \mathcal{C}$  und jeden Morphismus  $h : F(X) \rightarrow F(Y)$  in  $\mathcal{D}$  einen Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  mit  $F(f) = h$  gibt.
- wesentlich surjektiv*, wenn es für jedes Objekt  $Z \in \text{Ob } \mathcal{D}$  ein Objekt  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  mit  $F(X) \cong Z$  gibt.

Untersuche einen Funktor deiner Wahl daraufhin, ob er treu, voll oder wesentlich surjektiv ist.

**Aufgabe 4:** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$  ein Objekt. Wir nehmen an, dass wir für jedes Objekt  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  ein bestimmtes Produkt  $A \times X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  gegeben haben. Überlege, wie man die unvollständige Zuordnungsvorschrift

$$\begin{array}{lcl} F: & \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{C} \\ & X & \longmapsto A \times X \end{array}$$

zu einer Funktordefinition ausweiten kann. Wie kann man  $F$  auf Morphismen definieren? Wieso sind die Funktoraxiome erfüllt?

**Projektaufgabe:** Sei  $\mathcal{C}$  eine lokal kleine Kategorie und  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$  ein Objekt. Der *kovariante Hom-Funktor zu  $A$*  ist definiert als

$$\begin{array}{lcl} \check{A}: & \mathcal{C} & \longrightarrow \text{Set} \\ & X & \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \\ (f : X \rightarrow Y) & \longmapsto & f_{\star}, \end{array}$$

wobei  $f_{\star}$  die Abbildung

$$\begin{array}{lcl} f_{\star}: & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) & \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \\ & g & \longmapsto f \circ g \end{array}$$

ist. Zeige als Hinführung auf den Yoneda-Vortrag, dass  $\check{A}$  tatsächlich ein Funktor ist.