

Pizzaseminar zur Kategorientheorie

5. Übungsblatt

Aufgabe 1. Spitze schon im Diagramm

Sei $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm in einer Kategorie \mathcal{C} . Besitze \mathcal{D} ein terminales Objekt T . Zeige per Hand oder mit dem Kriterium aus Aufgabe 4, dass dann schon $F(T)$ selbst zu einem Kolimes von F wird.

Aufgabe 2. Polynome und Potenzreihen

Sei K ein Körper und sei $K[X]_n$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten in K . Bearbeite eine der folgenden Teilaufgaben:

- a) Zeige, dass der Vektorraum $K[X]$ zu einem Kolimes des Diagramms

$$K[X]_0 \hookrightarrow K[X]_1 \hookrightarrow K[X]_2 \hookrightarrow \dots$$

wird. Die Morphismen sind jeweils die Inklusionsabbildungen.

- b) Zeige, dass der Vektorraum $K[[X]] := \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_0, a_1, \dots \in K\}$ der formalen Potenzreihen in K zu einem Limes des Diagramms

$$\dots \twoheadrightarrow K[X]_2 \twoheadrightarrow K[X]_1 \twoheadrightarrow K[X]_0$$

wird. Die Morphismen schneiden jeweils den höchsten Koeffizienten ab.

Aufgabe 3. Monomorphe natürliche Transformationen

- a) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus einer Kategorie. Zeige, dass f genau dann ein Monomorphismus ist, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}} & X \\ \text{id} \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

ein Faserprodukt diagramm ist (Definition im Skript).

- b) Sei $\eta : F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Besitze \mathcal{D} alle Faserprodukte. Zeige: η ist genau dann ein Monomorphismus in $\text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, wenn alle Komponenten η_X Monomorphismen in \mathcal{D} sind.

Tipp: Limiten in Funktorkategorien berechnet man objektweise, siehe Skript.

Aufgabe 4*. Kofinale Unterdiagramme

In der Analysis gibt es folgende Mottos: *Das Weglassen endlich vieler Folgenglieder ändert nicht das Konvergenzverhalten. Teilfolgen konvergenter Folgen konvergieren ebenfalls, und zwar gegen denselben Grenzwert.* Diese Mottos wollen wir auf (Ko-)Limiten in der Kategorientheorie übertragen.

Sei dazu $H : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ ein *kofinaler* Funktor (Definition im Skript) und $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein \mathcal{D} -förmiges Diagramm in einer Kategorie \mathcal{C} .

- a) Zeige: Die Kategorie der Kokegel von F ist äquivalent zur Kategorie der Kokegel von $F \circ H$.
b) Was folgt daher über das Verhältnis der Kolimiten von F und $F \circ H$?