

Pizzaseminar zu konstruktiver Mathematik 1. Übungsblatt

Aufgabe 1. Diskretheit der natürlichen Zahlen

Zeige für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

$$n = 0 \quad \vee \quad \neg(n = 0).$$

Verwende dazu nur die fünf *Peano-Axiome*:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat eine Zahl $S(n)$ als Nachfolger.
3. Die Zahl 0 ist Nachfolger keiner Zahl.
4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
5. Enthält eine Teilmenge der natürlichen Zahlen die Zahl 0 und mit jeder Zahl auch ihren Nachfolger, so enthält sie schon alle natürlichen Zahlen.

Aufgabe 2. Konstruktive Tautologien

Zeige für beliebige Aussagen φ und ψ (bzw. $\psi(x)$):

- a) $\varphi \implies \neg\neg\varphi$
- b) $(\varphi \implies \psi) \implies (\neg\psi \implies \neg\varphi)$
- c) $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$
- d) $\neg\neg\exists x \in A: \psi(x) \iff \neg\forall x \in A: \neg\psi(x)$

Gilt ggf. auch die Rückrichtung? *Tipp*: Die Negation ist als $\neg\varphi := (\varphi \implies \perp)$ definiert. Wahrheitswertetafeln haben hier nichts zu suchen.

Aufgabe 3. Doppelnegationselimination

Zeige, dass folgende zwei Prinzipien äquivalent sind:

(LEM) Für alle Aussagen φ gilt: $\varphi \vee \neg\varphi$.

(DNE) Für alle Aussagen ψ gilt: $\neg\neg\psi \implies \psi$.

Tipp für (DNE) \implies (LEM): Verwende die Voraussetzung *nicht* für $\psi := \varphi$.

Aufgabe 4. Teilmengen von $\{\star\}$

Klassisch gilt:

Jede Teilmenge von $X := \{\star\}$ ist gleich \emptyset oder gleich X .

Konstruktiv lässt sich das nicht zeigen, die Potenzmenge von X hat (potenziell) viel mehr Struktur. Beweise das durch ein *brouwersches Gegenbeispiel*: Zeige, dass aus dieser Aussage das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten folgt.