Universität Augsburg
21. August 2013

Pizzaseminar zu konstruktiver Mathematik
2. Übungsblatt

Aufgabe 1. *Doppelnegationsübersetzung*

Beweise die fundamentalen Eigenschaften der Doppelnegationsübersetzung, jeweils für alle Aussagen φ und ψ in beliebigen Kontexten $\vec{x}$.

a) Klassisch gilt: $\varphi \Longleftrightarrow \varphi^\circ$.

b) Intuitionistisch gilt: $\neg\neg\varphi^\circ \Longrightarrow \varphi^\circ$.

c) Wenn $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$ klassisch, dann $\varphi^\circ \vdash_{\vec{x}} \psi^\circ$ intuitionistisch.

   Bemerkung: Du kannst sogar zeigen, dass $\varphi^\circ \vdash_{\vec{x}} \psi^\circ$ in *minimaler Logik* gilt, das ist intuitionistische Logik ohne das Prinzip *ex falso quodlibet* ($\perp \vdash_{\vec{x}} \chi$).

Aufgabe 2. *Beweisbäume*

Finde für folgende Sequenzen formale Ableitungsbäume:

a) $(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash_{\vec{x}} ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

b) $(\exists y : Y \colon \varphi) \vdash_{\vec{x},z} \varphi[z/y]$

c) $(x = y) \vdash_{x,y} (y = x)$

Aufgabe 3. *Minimumsprinzip*

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge natürlicher Zahlen. Wir wollen die Aussage

$$A :\equiv (\exists n : \mathbb{N} \colon \forall m : \mathbb{N} \colon a_n \leq a_m)$$

betrachten, die besagt, dass die Folge ein Minimum annimmt.

a) Zeige konstruktiv, dass $\neg\neg A$.

b) Formuliere deinen Beweis als Streitgespräch für $\neg\neg A$ (ohne Zeitsprünge).

c) Formulieren deinen Beweis als Streitgespräch für A (notwendigermaßen mit Zeitsprüngen).

d) Welcher Algorithmus zur Minimumssuche ist in deinem Beweis versteckt?

Bemerkung: Man kann nicht erwarten, konstruktiv A zeigen zu können. Die Aussage, dass das für alle Folgen doch ginge, ist ein klassisches Prinzip, das übrigens aus dem Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten folgt, aber echt schwächer ist.

Aufgabe 4. *Wissen im Grenzwert*

Experimentell kann man das Minimum einer Folge natürlicher Zahlen wie folgt bestimmen: Man läuft die Folgeglieder sequenziell ab. Stößt man dabei auf einen Wert, der kleiner als alle vorherigen Werte ist, proklamiert man diesen als das Minimum der Folge (und entschuldigt sich ggf. für vorherige falsche Ankündigungen). Klassische Metalogik vorausgesetzt, wird man *irgendwann* auf das wahre Minimum stoßen und dann seine Aussage nie wieder ändern; *wann* der richtige Minimalwert gefunden wurde, kann man jedoch selbst nicht sagen.

Finde Alltagsbeispiele für dieses lerntheoretische Phänomen, also für Situationen, in denen man wiederholt Vermutungen abgibt und tatsächlich schlussendlich den richtigen Sachverhalt lernt, jedoch selbst nie sagen kann, ab wann die eigene Vermutung korrekt ist.