Universität Augsburg
25. Oktober 2013

Pizzaseminar zu konstruktiver Mathematik
5. Übungsblatt

Aufgabe 1. *Monomorphismen und Epimorphismen aus interner Sicht*

Sei X ein topologischer Raum (oder eine Örtlichkeit). Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf X. Zeige, ...

a) ... dass α genau dann Monomorphismus ist, wenn $X \models \forall x, y : \mathcal{F}.\ \alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow x = y$.

b) ... dass α genau dann ein Epimorphismus ist, wenn $X \models \forall y : \mathcal{G}.\ \exists x : \mathcal{F}.\ \alpha(x) = y$.

Aus Sicht der internen Sprache des Garbentopos $\mathrm{Sh}(X)$ sehen also Monomorphismen wie gewöhnliche injektive und Epimorphismen wie gewöhnliche surjektive Abbildungen aus.

Aufgabe 2. *Vereinfachungsregeln für die interne Sprache*

Sei X ein topologischer Raum.

a) *Eindeutige Existenz ist globale Existenz.* Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und φ eine Aussage, in der eine Variable $x : \mathcal{F}$ frei vorkommt. Zeige: Genau dann gilt $X \models \exists! x : \mathcal{F}.\ \varphi$, wenn auf jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ genau ein Schnitt $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ mit $U \models \varphi(s)$ existiert.

b) *Topologische Interpretation der Doppelnegation.* Sei φ eine Aussage. Zeige: Genau dann gilt $X \models \neg\neg\varphi$, wenn es eine dichte offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $U \models \varphi$ gibt.

Aufgabe 3. *Die Ringgarbe stetiger Funktionen als Körper*

Sei X ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{C}^0$ die Garbe der stetigen Funktionen auf X.

a) Sei $f \in \Gamma(U, \mathcal{C}^0)$. Zeige: Die Funktion f besitzt genau dann ein multiplikatives Inverses in $\Gamma(U, \mathcal{C}^0)$, wenn $X \models \ulcorner f \text{ invertierbar} \urcorner$, d. h. wenn $X \models \exists g : \mathcal{C}^0.\ fg = 1$.

b) Zeige, dass $\mathcal{C}^0$ aus interner Sicht in folgendem Sinn ein Körper ist:

$$X \models \forall f : \mathcal{C}^0.\ \neg(\ulcorner f \text{ invertierbar} \urcorner) \Rightarrow f = 0.$$

c) Zeige, dass $\mathcal{C}^0$ aber nicht folgende Körperbedingung erfüllt:

$$X \models \forall f : \mathcal{C}^0.\ f = 0 \vee \ulcorner f \text{ invertierbar} \urcorner.$$

Bemerkung. Man kann zeigen, dass $\mathcal{C}^0$ aus interner Sicht die Rolle der über dedekindsche Schnitte konstruierten reellen Zahlen erfüllt.

Aufgabe 4. *Basen endlich erzeugter Vektorräume*

a) Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Ring k, der die Körperbedingung aus Aufgabe 3b) erfüllt. Zeige konstruktiv, dass V *nicht nicht* eine Basis besitzt.

   Tipp. Verwende, dass die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid V \text{ besitzt ein Erzeugendensystem der Länge } n\}$ *nicht nicht* ein Minimum besitzt.

b) Sei X ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{C}^0$-Modulgarbe, die lokal von endlichem Typ ist (das ist gleichbedeutend damit, dass $\mathcal{F}$ aus interner Sicht ein endlich erzeugter $\mathcal{C}^0$-Modul ist). Folgere direkt aus a), dass $\mathcal{F}$ auf einer dichten offenen Teilmenge U lokal frei ist (dass es also eine offene Überdeckung $U = \bigcup_i U_i$ gibt, sodass die $\mathcal{F}|_{U_i}$ isomorph zu Modulgarben der Form $(\mathcal{C}^0|_{U_i})^{n_i}$ sind).