

## Pizzaseminar zu erzeugenden Funktionen 1. Übungsblatt

**Aufgabe 0:** Spiele mit erzeugenden Funktionen auf dem Rechner! Erstelle dir zum Beispiel auf `sage.math.uni-augsburg.de` einen Account und probiere dann den folgenden Code aus:

```
X.<x> = PowerSeriesRing(QQ)
print 1/(1-x-x^2)
print
XY.<y> = PowerSeriesRing(X)
print 1/(1-y-x*y)
```

**Aufgabe 1:** Sei  $f_n$  die Anzahl der Teilmengen der Menge  $\{1, \dots, n\}$ , welche keine zwei benachbarten Zahlen enthalten. Bestimme eine Rekursionsgleichung für die Folge  $(f_n)$  und die (gewöhnliche) erzeugende Funktion.

Verfeinere anschließend die Folge zur Doppelfolge durch Einführung eines neuen Parameters  $k$ , der die Mächtigkeit zählt:  $b_{n,k}$  sei die Anzahl der  $k$ -Teilmengen der Menge  $\{1, \dots, n\}$ , welche keine zwei benachbarten Zahlen enthalten. Suche auch hier Rekursionsgleichung und (doppelt gewöhnliche) erzeugende Funktion.

**Aufgabe 2:** Sei  $(f_n)_{n \geq 0}$  eine Folge, die durch die Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} f_n &= a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + a_3 f_{n-3} + c, & n &\geq 3 \\ f_n &= b_n, & n &= 0, 1, 2 \end{aligned}$$

mit festen  $a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, c$  gegeben ist. Bestimme die gewöhnliche und exponentiell erzeugende Funktion der Folge.

**Aufgabe 3:** Sei  $s_{n,p} := \sum_{k=0}^n k^p$  die Verallgemeinerung des kleinen Gauß. Leite eine Rekursionsformel für die Doppelfolge  $(s_{n,p})$  her (benutze binomische Formel) und bestimme die erzeugende Funktion

$$S(x, t) = \sum_{n,p \geq 0} s_{n,p} x^n \frac{t^p}{p!}.$$