Adjungierte Funktoren

4. April 2013

Motivation Erinnerung: Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$:
$\exists F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ inverse Funktoren, d.h. $F \circ G \cong id_{\mathcal{C}}$ und $G \circ G \cong id_{\mathcal{D}}$

Idee: Hin- und herschieben von Morphismen zwischen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$.
$\rightsquigarrow$ Verallgemeinerung, s.d. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ nicht mehr äquivalent sein müssen.

Definition 0.1

Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien und $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren,

- *F heißt links-adjungiert zu G*
- *G heißt rechts-adjungiert zu F*

falls $\forall X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$ gilt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) \underset{\textit{bijektiv und natürlich in } X, Y}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, GX)$$

In Zeichen: $F \dashv G$

was heißt *natrlich*? Interpretiere $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F\_\_, \_\_)$ als Funktor $\mathcal{D}^{op} \times \mathcal{C} \to Set$ und $\mathrm{Hom} : \mathcal{C}(\_\_, G\_\_)$ als Funktor $\mathcal{D}^{op} \times \mathcal{C} \to Set$
$\rightsquigarrow$ natürliche Trasformation zwischen deren Funktoren

Explizit: Für $f : X \to X'$ Morphismus in $\mathcal{C}$ und $g : Y' \to Y$ Morphismus in $\mathcal{D}$, soll das folgende Diagramm kommutieren

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(Fg, f)"] & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, GX) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(g, Gf)"'] & \varphi \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY', X') & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', GX') & Gf \circ \varphi \circ g
\end{tikzcd}$$

Beispiel 0.2

k Körper, $Vect_k \xrightarrow{U} Set$ Vergissfunktor
$Set \to \underset{F}{Vekt_k}$ freier Funktor $\underset{\textit{Menge}}{X} \mapsto FX = \{\sum_{n=1}^{N} \lambda_i x_i\}$ *endli. Linearkombination von Elementen aus X. S ist Basis von FX.*

$$(X \xrightarrow{f} X') \mapsto Ff$$

wobei Ff eine lineare Abbildung ist, die durch $x_i \mapsto f(x_i)$ gegeben ist.

$$Ff(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(x_i)$$

Beh: $F \dashv U$

Beweis:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY,V) \overset{?}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,UV)$$

wobei

- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY,V) \overset{\text{def}}{=} \{\text{lin. Abb } FY \to V\}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,UV) \overset{\text{def}}{=} \{\text{bel. Abb. } Y \to V\} \ni \varphi$

$$\varphi \mapsto \Big(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i \mapsto \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi(y_i)\Big)$$

bijektiv, da jede lineare Abbildung eindeutig durch die Basis festgelegt ist.

Natürlich in Y und V: $f : V \mapsto V'$ und $g : Y \mapsto Y'$

$$\begin{tikzcd}
\big(\lambda_i y_i \mapsto \sum \lambda_i \varphi(y_i)\big) \arrow[ddd, mapsto] & & & \varphi \arrow[lll, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY,V) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(Fg,f)"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,UV) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(g,Gf)"'] & \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY',V') \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y',UV') & \\
\big(\sum \lambda_i y_i' \mapsto \sum \lambda_i f(\varphi(g(y_i')))\big) & & & Uf \circ \varphi \circ g \arrow[lll, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

Beispiel 0.3

$$U : Cat \to Set$$

$$\begin{aligned} L :& Set \to Kat \\ & X \mapsto \textit{diskrete Kategorie auf } X \ \textit{(d.h. nur Identitätsmorphismen)} \\ R :& Set \to Cat \\ & X \mapsto \textit{indiskrete Kategorie auf } X \textit{(d.h. zwischen je zwei Objekten genau ein Morphismus)} \end{aligned}$$

Beh:

1. $L \dashv U$
2. $U \dashv R$

zu 1. $C = Cat$, $D = Set$ $\mathrm{Hom}_{Cat}(LX, \mathcal{C}) \cong \mathrm{Hom}_{Set}(X, U\mathcal{C})$ *wobei*

- $\mathrm{Hom}_{Cat}(LX,\mathcal{C}) \overset{def}{=} \{\textit{Funktoren } LX \to \mathcal{C}\}$
- $\mathrm{Hom}_{Set}(X,U\mathcal{C}) \overset{def}{=} \{\textit{Abbildungen } X \to Obj(\mathcal{C})\}$

zu 2. $\mathrm{Hom}_{Set}(U\mathcal{C}, X) \cong \mathrm{Hom}_{Cat}(\mathcal{C}, RX)$ *wobei*

- $\mathrm{Hom}_{Set}(U\mathcal{C}, X) \overset{\text{def}}{=} \{Abbildungen\ Obj(\mathcal{C}) \to X\}$
- $\mathrm{Hom}_{Cat}(\mathcal{C}, RX) \overset{\text{def}}{=} \{Funktoren\ \mathcal{C} \to RX\}$

bijektiv, da Morphismen in RX durch Quelle und Ziel eindeutig bestimmt

Satz 0.4

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ links-adjungiert zu $G : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, dann gilt:

- *F erhält Kolimiten von D*
- *G erhält Limiten von C*

Folgerung:

- $U : Vect_k \to Set$ erhält Limiten, aber nicht Kolimiten und hat somit keine rechtsadjungierte Funktoren
- $U : Cat \to Set$ erhält Limiten und Kolimiten

Beweis: Sei $I \overset{D}{\to} \mathcal{D}$ ein Diagramm, mit Limes $\varprojlim_I D$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, G\varprojlim_I D_i) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, \varprojlim_I D_i) \\
&\cong \varprojlim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, D_i) \\
&\cong \varprojlim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, GD_i) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, \varprojlim_I GD_i)
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Natürlich in $Y \overset{\text{Yoneda Lemma}}{\rightsquigarrow} G\varprojlim_I D_i \cong \varprojlim_I GD_i$. ■

Beispiel 0.5

$\mathcal{C} = Grp$, $\mathcal{D} = Grp^2 = Grp \times Grp$

$$\begin{aligned}
F :& Grp^2 \to Grp && \textit{Produktfunktor} \\
& (G_1, G_2) \mapsto G_1 \times G_2 \\
G :& Grp \to Grp^2 && \textit{Diagonalfunktor} \\
& G \mapsto (G, G)
\end{aligned}$$

Beh: $F \vdash G$

$$\mathrm{Hom}_{Grp^2}((G, G), (H_1, H_2)) \cong \mathrm{Hom}_{Grp}(G, H_1 \times H_2)$$

wobei

- $\operatorname{Hom}_{Grp^2}((G,G),(H_1,H_2)) = \{\textit{Gruppen-Homomorphismen}\}$
- $\operatorname{Hom}_{Grp}(G,H_1 \times H_2) = \{G \to H_1 \times H_2 \ \textit{Gruppen-Homomorphismen}\}$

1 Kombinatorische Spezies

Was wollen Kombinatoriker? $\rightsquigarrow$ Strukturen Zählen

Beispiel 1.1

Auf wieviele Arten kann man n bunte Steine auf einer Schildkröte verteilen?

Modellierung

- Wir haben eine *Struktur*
- die von *Grundelementen* abhängt

ad 2) : Es kommt nicht darauf an, ob steine, Zahlen, etc. entscheidend ist nur ihre Anzahl.

Definition 1.2

Kategorie $\mathcal{B}$:

- $Obj\mathcal{B}$ = *endliche Mengen*
- $Morph\mathcal{B}$ = *Bijektive Abbildungen*

ad 1): Kategorie von *Strukturen* (nicht so wichtig, muss reihhaltig genug sein)
zB.: FinSet, $\mathcal{B}$

Abhängigkeit der Struktur von $\mathcal{B}$ $\rightsquigarrow$ Funktor

Definition 1.3

Eine kombinatorische Spezies *ist ein Funktor* $\mathcal{F} : \mathcal{B} \to \underline{\text{FinSet}}$

Beispiel 1.4

- *Spezies der zyklischen Ordnungen*

$$\mathcal{C}yc : A \mapsto \{a \to b \to \dots \to a \mid A = \{a, b, \dots\}\}$$

- *Spezies $\mathcal{S}eq_k$ mit $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{S}eq_k : A \mapsto \{\underbrace{\sqcup_a \;\; \sqcup_{b,c} \;\; \dots}_{k} \mid A = \{a, b, c, \dots\}\}$$

Kombinatoriker wollen die Anzahl von Strukturen in der Abhängigkeit von der Anzhal der Elemente in A zählen

- Zu einer Spezies $\mathcal{F}$ definiere $f_n := |\mathcal{F}(\{1, \dots, b\})|$ und (exponentiell) *erzeugende Funktionen*

$$F = \sum_{n \geq 0} f_n \cdot \frac{x^n}{n!} = f_0 + f_1 x + \frac{1}{2} f_2 x^2 + \frac{1}{6} f_3 x^3 + \dots$$

Beispiel 1.5

- *zu $\mathcal{C}yc$*

$$cyc_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!\,, n \geq 1 \qquad\qquad cyc_0 = 0$$

Erzeugende Funktionen

$$Cyc = \sum_{n \geq 1} \frac{(n-1)!}{n!} x^n) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = -ln(1-x)$$

- *zu $\mathcal{S}eq_k$*

$$2bsp_n = k^n$$

$$2Bsp = \sum_{n \geq 0} \frac{k^n}{n!} x^n = \exp(kx)$$

Beispiel 1.6

- *$\mathcal{X}$: Spezies der Einelementigen Menge*

$$\mathcal{X} : A \mapsto \begin{cases} \{\star\} & \text{, falls } |A| = 1 \\ \emptyset & \text{, sonst} \end{cases}$$

$X = x$

- ***1***: *Spezies der 0-elementigen Menge*

$$\mathbf{1} : A \mapsto \begin{cases} \{\star\} & \text{, falls } A = \emptyset \\ \emptyset & \text{, sonst} \end{cases}$$

  $1 = 1$

- $\mathscr{E}$: *Spezies der Menge*

$$\mathscr{E} : A \mapsto A$$

  $e_0 = 1,\ e_1 = 1,\ e_2 = 1\ \ldots$

$$E = 1\frac{x^0}{0!} + 1\frac{x}{1!} + 1\frac{x^2}{2!} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots = \exp(x)$$

- $\mathcal{P}erm$ = *Spezies der Permmutationen*
  $perm_0 = 1,\ perm_1 = 1,\ perm_n = n!$

$$Perm = \sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n!} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Bemerkung 1.7

Erzeugende Funktionen kann man addieren, malnehmen, ineinander einsetzen, . . .

$\rightsquigarrow$ was bedeutet das für Spezies?

zu +

$$+ \text{ :Disjukte Vereinigung von Spezies}$$
$$\mathcal{F} + \mathcal{G} : A \mapsto \mathcal{F}(A) \amalg \mathcal{G}(A)$$

$^+$: Spezies der nichtleeren Mengen

$$= 1 + \mathscr{E}^+$$

und deshalb: $E^+ = \exp(x) - 1$

zu ·

$$\cdot \text{ :Paarbildung}$$

erzeugende Funktionen:

$$\sum_{n\geq 0} f_n \frac{x^n}{n!} \sum_{n>0} g_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!} f_k g_l \Big) \frac{x^n}{n!} \qquad (Cauchy-Produkt)$$

$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} : A \mapsto \coprod_{B\dot{\cup}C} \mathcal{F}(B) \times \mathcal{G}(C)$$

lies als *und*

Beispiel 1.8

Injektionen von $\{1, \ldots, 4\}$ nach A:
Injektion = Bijektiong aufs Bild und *Rest*

$$\mathcal{I}nj_4 = \mathcal{P}erm_4 \cdot \mathscr{E}$$

$$^4Inj = \frac{4!x^4}{4!} \cdot \exp(x)$$

Beispiel 1.9

Fixpunktfreie Permutationen $\mathcal{D}er$

$$\mathcal{P}erm = \mathscr{E} \cdot \mathcal{D}er$$

$\frac{1}{1-x} = exp(x)Der \Rightarrow Der = \frac{exp(-x)}{1-x}$

zu Spezies einsetzen $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ lies als *von*

Beispiel 1.10

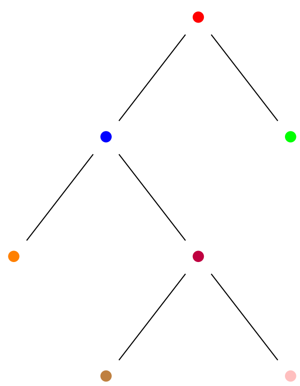
Partitionen (=Zerlegungen) einer Menge
eine Zerlegung ist eine Menge von (Uner-) nicht leeren Mengen

$$\mathcal{P}art = \mathscr{E}(\mathscr{E}^+)$$

und die Erzeugende Funktion

$$Part = \exp(\exp(x) - 1)$$

Beispiel 1.11 (*Binäre Bäume*)



$$\mathcal{B}in\mathcal{T}ree = X + X \cdot \mathcal{B}in\mathcal{T}ree \cdot \mathcal{B}in\mathcal{T}ree$$

erzeugende Funktionen $BT = X + X \cdot BT^2$ *und damit*

$$X \cdot BT^2 - BT + X = 0$$
$$BT = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{(1^2 - 4x^2)})$$

Weiterführende Literatur:

- Sedgewick / Flajolet: Analytic Combinatorics

Was macht man, wenn man die Farben nicht unterscheidet?

$$\mathcal{B}' : Obj = \text{endl. Mengen}$$
$$Morph : \mathrm{Hom}(A, B) = \begin{cases} \{\star\} & \text{, falls } |A| = |B| \\ \emptyset & \text{, sonst} \end{cases}$$

Erzeugende Funktionen; $F' = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{1}$ *gewöhnliche erzeugende Funktionen*

- $+, \cdot$: interpretation wie bisher
- einsetzen: geht nicht gut

Beispiel 1.12

Spezies der Karnickel (nach Fibonacci)
Wollen die Anzahl der Möglichkeiten für Karnickel nach n *Jahren, wenn am Anfang* 1 *vorhanden ist*

$$\mathcal{K} = 1 + K \cdot \overset{\boxed{\text{1 Jahr warten}}}{\overset{\downarrow}{X}} + K \cdot \overset{\boxed{\text{2 Jahre}}}{\overset{\downarrow}{X^2}}$$

$K = 1 + xK + x^2K$
$\Rightarrow K = \frac{1}{1-x-x^2}$