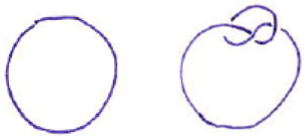
Knotentheorie - Stefan Knoblauch

1. Knoten
2. Äquivalenz von Knoten
3. Fundamentalgruppe

Beispiel. 

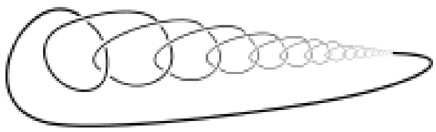
Unknoten und Kleeblattknoten

1 Knoten

Definition 1. Ein *Knoten* ist eine einfache, geschlossene Kurve, also

- $K : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ stetig,
- $K(0) = K(1)$ und
- $K(x) = K(y) \Rightarrow (x = y) \vee (x = 0 \wedge y = 1) \vee (x = 1 \wedge y = 1)$

Problem:



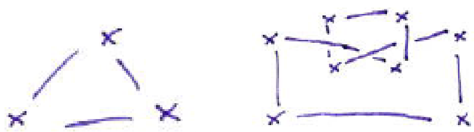
„WilderKnoten“ Quelle: Wikipedia

Deshalb zusätzliche Forderung für Knoten:

Definition 2. Ein *Knoten* ist eine einfache, geschlossene Kurve, also

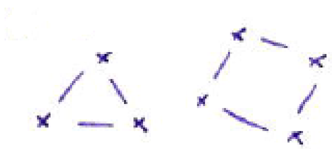
- $K : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ stetig,
- $K(0) = K(1)$,
- $K(x) = K(y) \Rightarrow (x = y) \vee (x = 0 \wedge y = 1) \vee (x = 1 \wedge y = 1)$ und
- K ist stetig differnzierbar auf $[0,1]$

Definition 3. Sei $(p_1, \ldots, p_n)$ *mit* $p_i \in \mathbb{R}^3\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, dann heißt die Vereinigung von den Strecken $[p_1, p_2], [p_2, p_3], \ldots, [p_{n-1}, p_n], [p_n, p_1]$ *geschlossener Polygonzug*, wobei $[p_i, p_{i+1}] := \{p_i + (p_{i+1} - p_i)\lambda \mid \lambda \in [0, 1]\}$. Ein *Knoten* ist ein einfacher(d.h., dass alle Ecken von einander verschieden sind und 2 verschiedene Kanten nur in Ecken den selben Wert annehmen), geschlossener Polygonzug.



Unknoten und Kleeblattknoten als Polygonzüge

Definition 4. Eine *Verschlingung* ist eine endliche Vereinigung von einfachen, geschlossenen Polygonzügen. Ein *Knoten* ist die Vereingung von genau einer Verschlingung.



Triviale Verschlingung

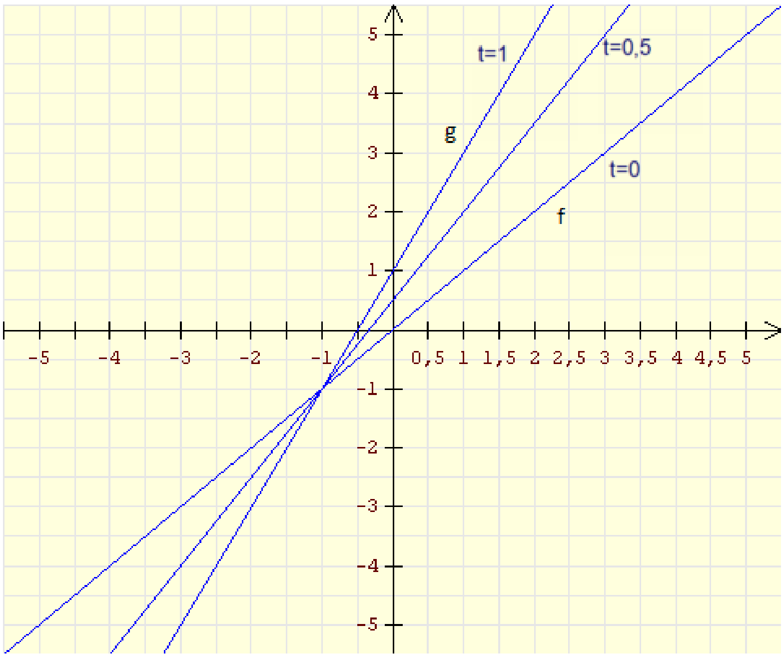
2 Äquivalenz

Zwei Unknoten

Definition 5. Seien (X, d_1) und (Y, d_2) metrische Räume und $f, g : X \longrightarrow Y$ Abbildungen, dann ist eine stetige Abbildung $h : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ mit $h(-, 0) = f\ \wedge\ h(-, 1) = g$ eine *Homotopie* zwischen f und g.

Beispiel.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ \ x \mapsto x$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ \ x \mapsto 2x + 1$$
$$h : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}\ ,\ \ (x,t) \mapsto (1+t)x + t$$



Quelle: Arndt-Brünner

Definition 6. Zwei Knoten $K, J : [0,1] \longrightarrow \{R^3$ heißen *äquivalent*, falls

$$K \sim J \ :\Leftrightarrow\ \exists H : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3\ mit \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} H(-,0) = K \\ H(-,1) = K \end{array}\right\} \text{H ist Homotopie} \\ H(-,t) \text{ ist Knoten } \forall t \in [0,1] \end{array} \right.$$

Dies definiert eine Äquivlanzrelation, da

- **Reflexivität**
  $K \sim K$ mit $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, -) \mapsto K(x)$

- **Symmetrie**
  $K \overset{H_{alt}}{\sim} J \Rightarrow J \overset{H_{neu}}{\sim} K$ mit $H_{neu}(x.t) := H_{alt}(x, 1-t)$

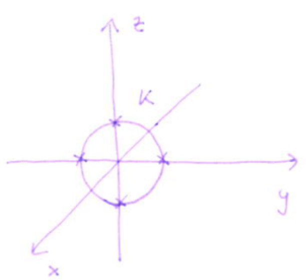
- **Transitivität**
  $K \overset{H_1}{\sim} J$ und $J \overset{H_2}{\sim} L \Rightarrow K \overset{H}{\sim} L$ mit $H(x,t) := \begin{cases} H_1(x, 2t) & \text{für } 0 \leq t \leq 0,5 \\ H_2(x, 2t-1) & \text{für } 0,5 < t \leq 1 \end{cases}$

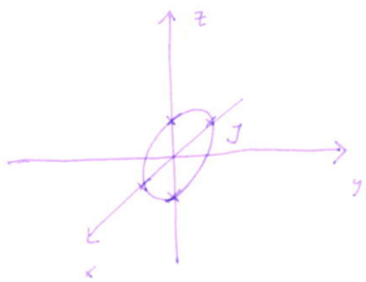
Dazu äquivalent:

Definition 7.

$$K \sim J \;:\Leftrightarrow\; \exists H : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3 \; mit \begin{cases} H(-,0) = \mathrm{id} \\ H(K(x),1) = J(x) \; \forall x \in [0,1] \\ \underbrace{H(-,t) \text{ ist bijektiv, stetig und } H^{-1}(-,t) \text{ ist stetig}}_{\text{H ist Homömorphismus}} \end{cases}$$

Beispiel. $K(\lambda) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\pi\lambda) \\ \sin(2\pi\lambda) \end{pmatrix}$, $J(\lambda) := \begin{pmatrix} \cos(2\pi\lambda) \\ 0 \\ \sin(2\pi\lambda) \end{pmatrix}$





$$H(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t) := \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) & \sin(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ -\sin(\frac{\pi}{2}t) & \cos(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ dann:}$$

$$H(K(x),1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K(x) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\lambda) \\ 0 \\ \sin(2\pi\lambda) \end{pmatrix} = J(x)$$

Definition 8. Die Funktion $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist die Projektion auf die ersten beiden Komponenten.

Definition 9. Das Bild dieser Projektion P heißt *reguläre Position*, falls

- je nur 2 Punkte des Knotens das selbe Bild haben und
- kein Eckpunkt auf einen Punkt abgebildet wird, auf den noch ein anderer Punkt abgebildet wurde.

3 Fundamentalgruppe

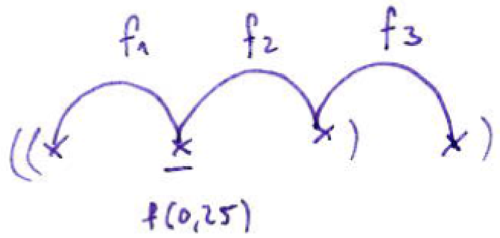
Definition 10. Seien (X,d) metrischer Raum und $p \in X$, dann ist
$\Omega(X,p) := \{\text{Kurven } K : [0,1] \to V \text{ mit } K(0) = K(1) = p\}$ die Fundamentalgruppe von p in X.

Definition 11. Seien $f, g : [0,1] \longrightarrow X$ Kurven, dann

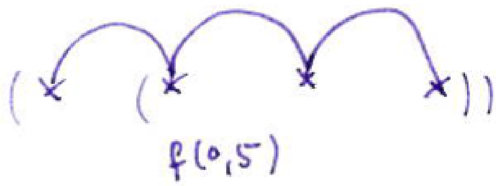
$$(f \star g)(t) := \begin{cases} f(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq 0,5 \\ g(2t-1) & \text{für } 0,5 < t \leq 1 \end{cases}$$

Achtung, diese Komposition ist nicht kommutativ!

Beispiel.



$$f = (f_1 \star f_2) \star f_3$$



$$f = f_1 \star (f_2 \star f_3)$$

Definition 12. K homotop zu J mit festem Endpunkt p

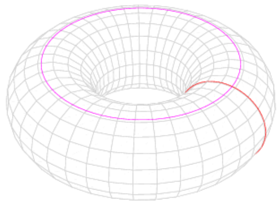
$$:\Leftrightarrow \exists H : [0,0] \times [0,1] \to X \text{ stetig mit } \begin{cases} H(-,0) = K \\ H(K(x),1) = J \\ H(0,t) = H(1,t) = p \ \forall t \in [0,1] \end{cases}$$

Definition 13. Sei $\pi_1(X,p) := \Omega(X,p)/_\sim$ die Projektion auf die Äquivalenzklasse $[p]$, dann

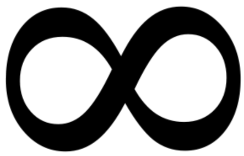
$$\begin{aligned} \star : \pi_1(X,p) \times \pi_1(X,p) &\to \pi_1(X,p) \\ ([a],[b]) &\mapsto [a \circ b] \end{aligned}$$

Proposition. *Seien $a, a', b, b' \in \Omega(X, p)$ und gelte $a \overset{H_1}{\sim} a'$ und $b \overset{H_2}{\sim} b'$, dann $a \circ b \overset{H}{\sim} a' \circ b'$ mit $H : [0,1] \times [0,1] \to X,\ H(-,t) := H_1(-,t) \star H_2(-,t)$*

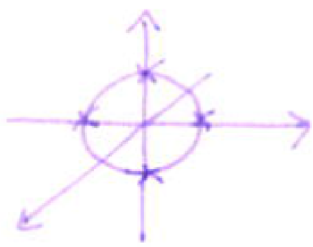
Beispiel. Fundamentalgruppe von

- $\mathbb{R}^3$ $\qquad \pi_1(\mathbb{R}^3, 1) = \{0\}$
- $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ $\qquad \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, 1) = \{0\}$
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\qquad \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, 1) = \mathbb{Z}$
- 

  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

  Quelle: scienceblogs.de
- 

  $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$

  Quelle: mediamanual.at
- 

  $\mathbb{Z}$

Bemerkung. π_1 ist ein *Funktor* von der Kategorie der (punktierten) topologischen Räume in die Kategorie der Gruppe. Neben anderen Funktoren (Homologie, Kohomologie,...) bildet er eine fundamentale Verbindung zwischen Topologie und Algebra.