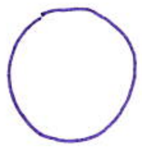
Knotentheorie

4. 9. 2013

Stefan Knoblauch (1)

1. Knoten
2. Äquivalenz von Knoten
3. Fundamentalgruppe



Unknoten

Kleeblattknoten

Beispiele

1. Def: Knoten

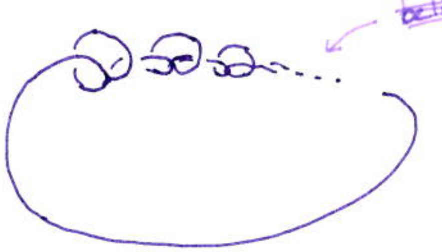
Ein Knoten ist eine einfache, geschlossene Kurve, also

$$k : [0,1] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{stetig}$$

$$k(0) = k(1) \quad \text{(geschlossen)}$$

$$k(x) = k(y) \Rightarrow x = y \;\vee\; (x=0 \wedge y=1) \;\vee\; (x=1 \wedge y=0)$$

„wilder Knoten":



unendlich ~~beliebig~~ viele Schleifen

2. Def: Knoten

stetig differenzierbar

3. Sei $(p_1, \dots, p_n)$ $\quad p_i \in \mathbb{R}^3 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$,

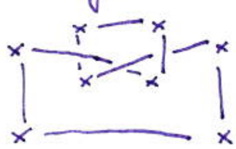
dann heißt die Vereinigung von den Strecken

$$[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{n-1}, p_n], [p_n, p_1] := \{p_n + (p_1 - p_n)t, \ t \in [0,1]\}$$

geschlossener Polygonzug.

Ein Knoten ist ein einfacher geschlossener Polygonzug.

Unknoten



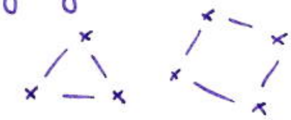
Kleeblatt

parametrischer Knoten

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

$p_1 \; p_2 \ldots p_n$

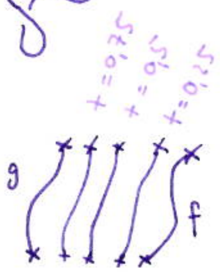
Def: Verschlingung



(trivialer Fall)

Äquivalenz

Def Homotopie



$(X, d_1), (Y, d_2)$ metrische Räume

$f, g : X \to Y$

$h : \overset{s}{X} \times \overset{t}{[0,1]} \to Y$ stetig   Homotopie

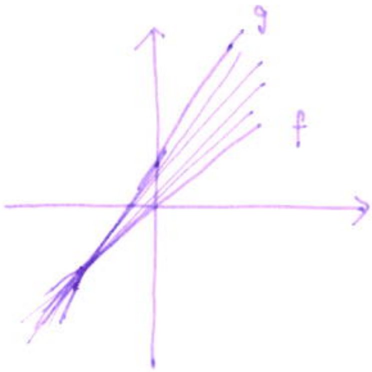
mit $h(-,0) = f \wedge h(-,1) = g$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x + 1$

$h : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$(x,t) \mapsto (1+t)x + t$



$K, J : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$$K \sim J \iff \exists H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 \quad \left.\begin{array}{l} \text{mit } H(-,0) = K \\ H(-,1) = J \end{array}\right\} \text{Homotopie}$$

$H(-,t)$ Knoten $\forall t \in [0,1]$

Reflexivität:

$K \sim K \qquad H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$(x, -) \mapsto K(x)$

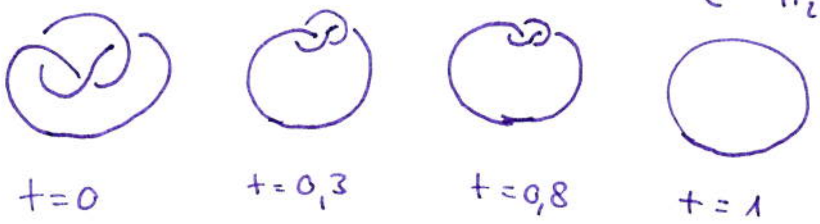
Symmetrie:

$J \overset{H_{alt}}{\sim} K \qquad K \overset{H_{neu}}{\sim} J \qquad H_{neu}(x,t) := H_{alt}(x, 1-t)$

Transitivität:

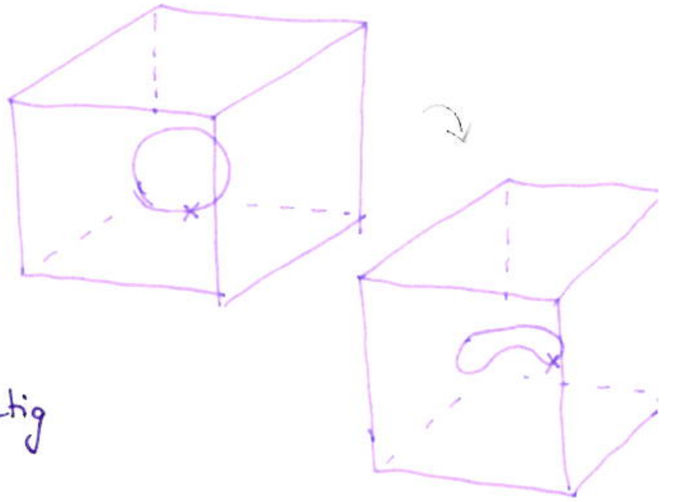
$K \overset{H_1}{\sim} J \qquad J \overset{H_2}{\sim} L$

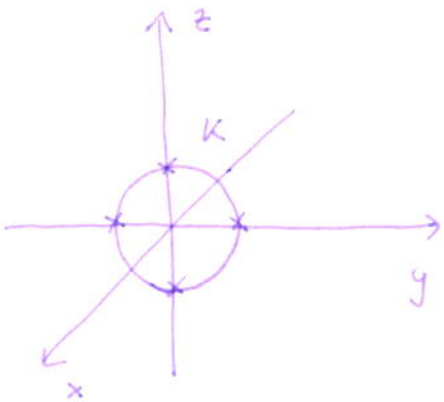
$$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H_1(x, 2t) & , 0 \le t \le 0{,}5 \\ H_2(x, 2t-1) & , 0{,}5 \le t \le 1 \end{cases}$$

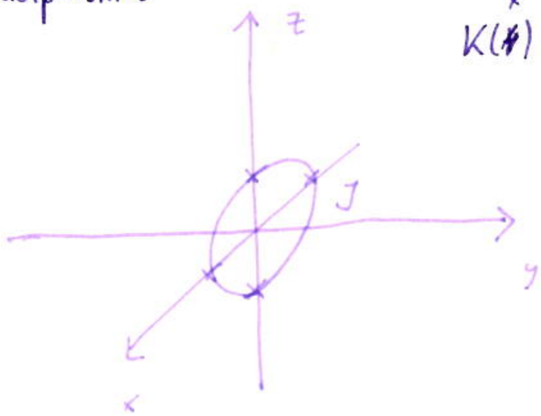


wären jetzt äquivalent

$$K \sim J \iff \exists\, H : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$H(-,0) = id$$
$$H(K(x),1) = J(x) \quad \forall x \in [0,1]$$
$$\underbrace{H(-,t) \text{ bij., stetig und } H^{-1}(-,t) \text{ stetig}}_{\text{Homöomorphismus}}$$







$$K(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\pi x) \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix}$$

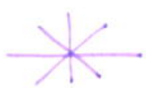
$$J(x) := \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) \\ 0 \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix}$$

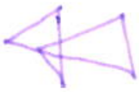
$$H\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t\right) := \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) & \sin(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ -\sin(\frac{\pi}{2}t) & \cos(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$H(K(x), 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K(x) \overset{!}{=} J(x)$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) \\ 0 \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix}$$

$P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$P[K]$ Knoten





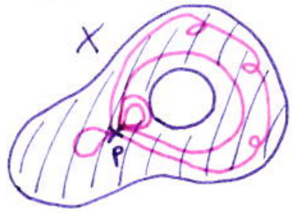
reguläre Position

→ je nur 2 Punkte des Knotens haben das selbe Bild

→ kein Eckpunkt darf auf einen Punkt abgebildet werden, auf den ein anderer Punkt abgebildet wurde

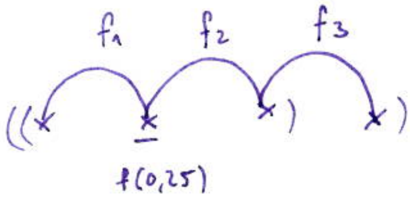
$\Omega(X,p) = \{$ Kurven $k: [0,1] \to X$ mit $k(0) = k(1) = p \}$

(X,d), $p \in X$

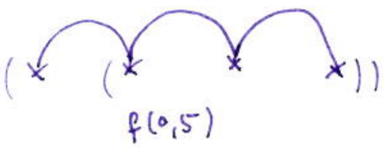


Sei $f,g : [0,1] \to X$

$$(f \star g)(t) := \begin{cases} f(2t) & , \ 0 \leq t \leq 0{,}5 \\ g(2t-1) & , \ 0{,}5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$



$f = (f_1 \star f_2) \star f_3$



$f = f_1 \star (f_2 \star f_3)$

$K \sim J \iff K$ homotop zu J mit festem Endpunkt

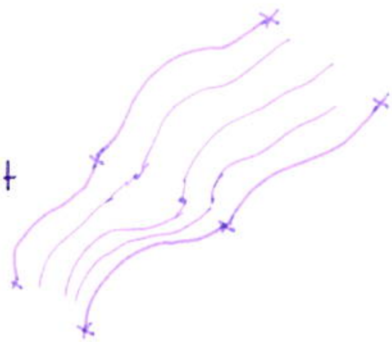
$\Omega(X,p) / \sim =: \pi_1(X,p)$

$\iff \exists \ H: [0,1] \times [0,1] \to X$ stetig

mit $H(-,0) = K$

$H(-,1) = J$

$H(0,t) = H(1,t) = p \quad \forall t$



$\star : \pi_1(X,p) \times \pi_1(X,p) \longrightarrow \pi_1(X,p)$,

$([a],[b]) \longmapsto [a \circ b]$

Sei $a, a', b, b' \in \Omega(X,p)$ und gelte $a \overset{H_1}{\sim} a'$ und $b \overset{H_2}{\sim} b'$

$a \circ b \overset{H_3}{\sim} a' \circ b'$

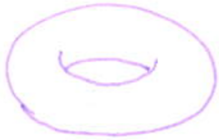
$H_3 : [0,1] \times [0,1] \to X$, $\quad H_3(-,t) := H_1(-,t) \star H_2(-,t)$

Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^3$ $\qquad \pi_1(\mathbb{R}, 1) = \{0\}$

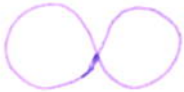
von $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ $\qquad \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, 1) = \{0\}$

von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\qquad \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, 1) = \mathbb{Z}$

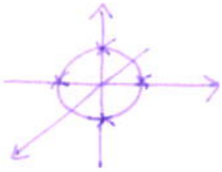
Beispiele



$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$



$\mathbb{Z}$

<u>Bem.:</u> π_1 ist ein <u>Funktor</u> von der Kategorie der (punktierten) topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen. Neben anderen Funktoren (Homologie, Kohomologie, ...) bildet er eine fundamentale Verbindung zwischen Topologie und Algebra.

<u>Wiederholung:</u> 18. 9. 2013

1

- Knoten: stetig diff.bare Einbettung $S^1 \to \mathbb{R}^3$
- Äquivalenz von Knoten: Homotopie $h_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$h_0 = id$

$h_1 | K_1 | = K_2$

- Verschlingung: „Knoten mit mehreren Komponenten"

„Borromäische Ringe"

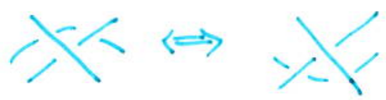
Frage: Wie kann man feststellen, ob zwei geg. Knoten äquivalent sind?

Reidemeister - Bewegungen

Typ I:

Typ II:

Typ III:



Satz: Zwei Knoten (Verschlingungen) (mit Orientierung) sind genau dann äquivalent, wenn sie sich nur durch Reidemeister - Bew. unterscheiden.

Bem:

Die Kauffman - Klammer

Idee: Ordne jedem Knotendiagramm ein Polynom zu, um dadurch die Knoten zu unterscheiden.

Def: Die Kauffman - Klammer ist eindeutige Abb.

$$\langle \cdot \rangle : \{\text{nicht-orient. Diagramme}\} \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}], \text{ mit}$$

(i) $\langle O \rangle = 1$

(ii) $\langle D \sqcup O \rangle = (-A^{-2} - A^{2}) \langle D \rangle$

(iii) $\langle \times \rangle = A \langle)(\rangle + A^{-1} \langle \asymp \rangle$

Bsp: (Linkshändiger) Kleeblattknoten

$$\langle\ \rangle = A \cdot \langle\ \rangle + A^{-1} \underbrace{\langle\ \rangle}_{= -A^{4} - A^{-4}}$$

$$\langle\ \rangle = A \cdot \underbrace{\langle\ \rangle}_{= (-A^{-2} - A^{2}) \cdot \langle\ \rangle} + A^{-1} \langle\ \rangle = -A^{3} \langle\ \rangle$$

$$= -A^{3} \left(A \cdot \underbrace{\langle\ \rangle}_{(-A^{-2}-A^{2} \cdot \underbrace{\langle\ \rangle}_{=1})} + A^{-1} \underbrace{\langle\ \rangle}_{=1} \right)$$

$$= A^{6}$$

$$= A^{7} - A^{3} - A^{-5}$$

insg.

Invarianz unter Reidemeister-Bew:

Typ II:
$$\langle\ \rangle = A \langle\ \rangle + A^{-1} \langle\ \rangle$$
$$= A \left(A \langle\ \rangle + A^{-1} \underbrace{\langle\ \rangle}_{(-A^{2}-A^{-2}) \langle\ \rangle} \right) + A^{-1} \left(A \langle\ \rangle + A^{-1} \langle\ \rangle \right)$$
$$= \langle\ \rangle$$

Typ III:
$$\langle\ \rangle = A^{-1} \underbrace{\langle\ \rangle}_{} + A \langle\ \rangle \overset{!}{=} \langle\ \rangle$$
$$= \langle\ \rangle$$
$$= \langle\ \rangle$$

Typ I:
$$\langle\ \rangle = -A^{3} \langle\ \rangle$$
$$\langle\ \rangle = -A^{-3} \langle\ \rangle$$

Idee: Zähle die Überkreuzungen im Diagramm mit

positive Überkreuzung   negative Überkreuzung

Def: $w(D) = \#(\text{pos. Üb.}) - \#(\text{neg. Üb.})$

Verwringung

$\rightsquigarrow X(D) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$

ist invariant unter allen Reidemeister-Bew!

Def: Jones-Polynom : $V(D) := X(D)$ mit $A = t^{-1/4}$

Bsp: $D =$  K_l

gespiegelt:  K_r

$w(D) = -3$

$V(K_l) = (-A^3)^3 (A^7 - A^3 - A^{-5})$

$= -A^{16} + A^{12} + A^4$

$\underset{t = A^{-4}}{=} -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$

$V(K_r) = -t^4 + t^3 + t$

gespiegelt

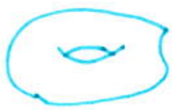
A und A^{-1} vertauscht bzw $t^{1/4}$ und $t^{-1/4}$

allgemein: $\langle \overline{K} \rangle = \overline{\langle K \rangle}$

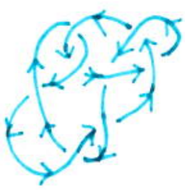
$K_l \not\sim K_r$

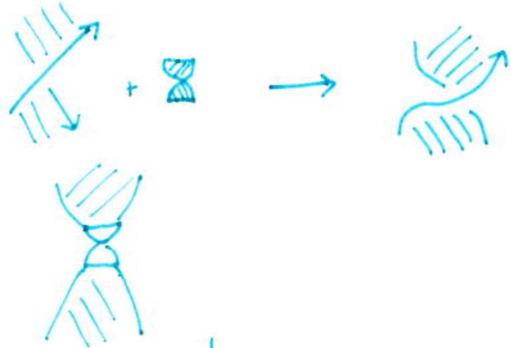
Offene Frage: Ist der Unknoten der einzige Knoten mit $V(K) = 1$

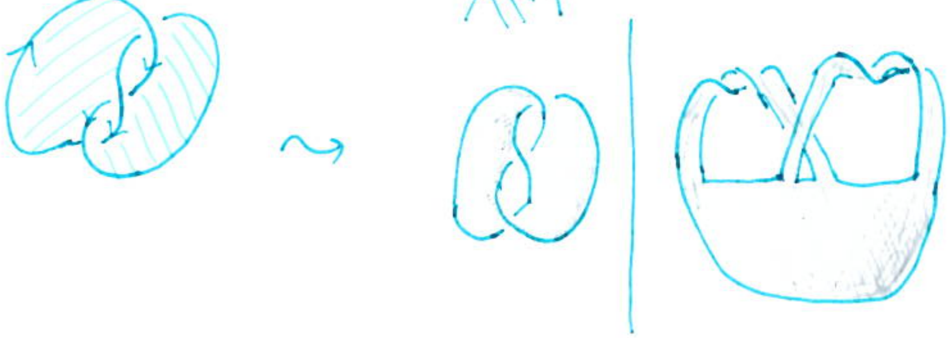
Seifert-Flächen



Seifert Algorithmus:

 $\rightsquigarrow$ disjunkte Kreise $\rightsquigarrow$ auffüllen durch Scheiben





① Wiederholung Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$

Definition: $\pi_1(X, x_0) := \{\text{Wege } \alpha : I \to X \mid \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\} / \sim$ Homotopie

↳ x_0 ist fester Basispunkt

mit festem Anfangs- und Endpunkt x_0 ⇝ ÄR heißt Fundamentalgruppe von X mit Basispunkt x_0

$\alpha \sim \beta \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, H : I \times I \to X$ stetig

$H(0, t) = \alpha$

$H(1, t) = \beta$

~~[illegible]~~ $t \mapsto H(\underset{\text{fest}}{s}, t)$ ist geschlossene Kurve mit $H(s, 0) = H(s, 1) = x_0$

Gruppenstruktur:

$[\alpha] \cdot \cancel{*} [\beta] := [\alpha * \beta]$

~~[illegible]~~

durchläuft erst α, dann β

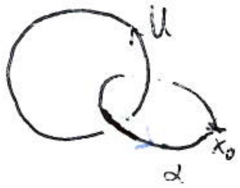
$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$

Sei $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$ Knoten

Definition der Knotengruppe: $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ heißt Knotengruppe

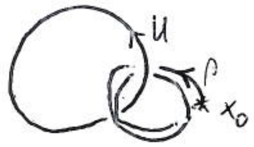
Bsp.: $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus U) \cong \mathbb{Z}$

↖ Unknoten



$[x_0] \mathrel{\hat{=}} 0$

$[\alpha] \mathrel{\hat{=}} 1$



$[\beta] \mathrel{\hat{=}} 2$

Wie lässt sich die Knotengruppe eines komplizierteren Knoten berechnen?

Gruppendarstellungen mit Erzeugern und Relationen:

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$ freie Gruppe über n Erzeugern
↳ d.h. keine Relationen

$$= \{ e, x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_1 x_2, x_2 x_1, \dots \}$$

„Wörter aus $x_1, \dots, x_n$"

Relationen:

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$$

r_i : Polynom in $x_1, \dots, x_n$

$$= \{ e, x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, x_1 x_2, x_2 x_1, \dots \} / \sim$$

$r_i \simeq e$

z. B. $\langle x_1, x_2 \mid r_1 = x_1 x_2 \rangle \simeq \langle x_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$

$x_1 x_2 = e$

$x_2 = x_1^{-1}$

$$\langle x_1 \mid r_1 = x_1^k \rangle = \langle x_1 \rangle / _{x_1^k = e} \cong \mathbb{Z} / k\mathbb{Z}$$

Freies Produkt von Gruppen:

$$G = \langle x_1, x_2, \dots \mid r_{x_1}, r_{x_2}, \dots \rangle$$

$$H = \langle y_1, y_2, \dots \mid r_{y_1}, r_{y_2}, \dots \rangle$$

$$\rightsquigarrow \quad G * H = \langle x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots \mid r_{x_1}, r_{x_2}, \dots, r_{y_1}, r_{y_2}, \dots \rangle$$

Die Wirtinger-Darstellung:

Algorithmus zur Berechnung der Knotengruppe

- Wähle reguläre Projektion von K (wie in Bsp.) auf (x, y)-Ebene
- Für jeden Bogen j wähle Erzeuger a_j von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$

- für jede Kreuzung v gibt es eine Relation R_v gemäß

$R_v = a_j^{-1} a_k a_i a_k^{-1}$

(d.h. $a_j = a_k a_i a_k^{-1}$)

$R_v = a_j^{-1} a_k^{-1} a_i a_k$

$a_j = a_k^{-1} a_i a_k$

- Die Knotengruppe von K ist gegeben durch

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle a_j, j \text{ Bogen} \mid R_v, v \text{ Kreuzung} \rangle$$

Beispiel: $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus U) = \langle a \rangle = \mathbb{Z}$

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus LK) = \langle a, b, c \mid R_{v_1}, R_{v_2}, R_{v_3} \rangle$$

$R_{v_1} = c^{-1} a b a^{-1}$

$R_{v_2} = b^{-1} c a c^{-1}$

$R_{v_3} = a^{-1} b c b^{-1}$

$$= \left\langle a, b, c \;\middle|\; \begin{array}{l} c = a b a^{-1} \\ b = c a c^{-1} \\ a = b c b^{-1} \end{array} \right\rangle$$

$$= \left\langle a, b \;\middle|\; \begin{array}{l} (i)\; b = (a b a^{-1})\, a\, ((a b a^{-1})^{-1}) = a b a b^{-1} a^{-1} \\ (ii)\; \underbrace{a = b\,(a b a^{-1})\, b^{-1}} \end{array} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad b a b a^{-1} b^{-1} a^{-1} = e$$

$$\overset{(\cdot)^{-1}}{\Leftrightarrow} \quad a b a b^{-1} a^{-1} b^{-1} = e \quad \Leftrightarrow (i)$$

$$= \langle a, b \mid a b a b^{-1} a^{-1} b^{-1} = e \rangle$$

Seifert-van-Kampen (ohne Beweis)

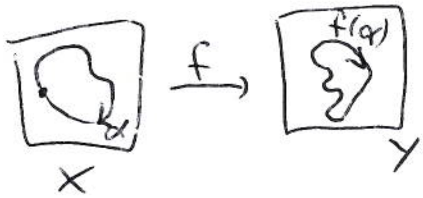
↳ ist wichtiger Satz über Fundamentalgruppen
wird zum Beweis der Wirtinger-Darstellung benötigt

X top. Raum $= \bigcup_{\alpha\in A} \underbrace{U_\alpha}_{\text{offen}}$ und Basispunkt $x_0 \in \bigcap_\alpha U_\alpha$

Inklusions-Abb.:

$$\begin{tikzcd} & U_\alpha \arrow[dr, "j_\alpha"] & \\ U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ur, "i_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "i_{\beta\alpha}"'] & & X \\ & U_\beta \arrow[ur, "j_\beta"'] & \end{tikzcd} \quad \text{induzieren} \quad \begin{tikzcd} & \pi_1(U_\alpha) \arrow[dr] & \\ \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[ur, "i_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "i_{\beta\alpha}"'] & & \pi_1(X) \\ & \pi_1(U_\beta) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$f : X \to Y$ stetig
top. Räume



induziert Abb.

$$f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$$
$$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

$$N \subset \mathop{*}_\alpha \pi_1(U_\alpha) \xrightarrow{\Phi := *_\alpha j_\alpha} \pi_1(X)$$

normale Untergruppe erzeugt von $i_{\alpha\beta}(c)\, i_{\beta\alpha}(c)^{-1}$, $\alpha \neq \beta$, $c \in \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta)$

Satz: U_α, $U_\alpha \cap U_\beta$, $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ wegzshgd. $\forall \alpha, \beta, \gamma$

$\Rightarrow \Phi$ ist surjektiv und $\ker \Phi = N$,
d.h. Φ induziert einen Isom.

$$\mathop{*}_\alpha \pi_1(U_\alpha) / N \xrightarrow{\cong} \pi_1(X)$$

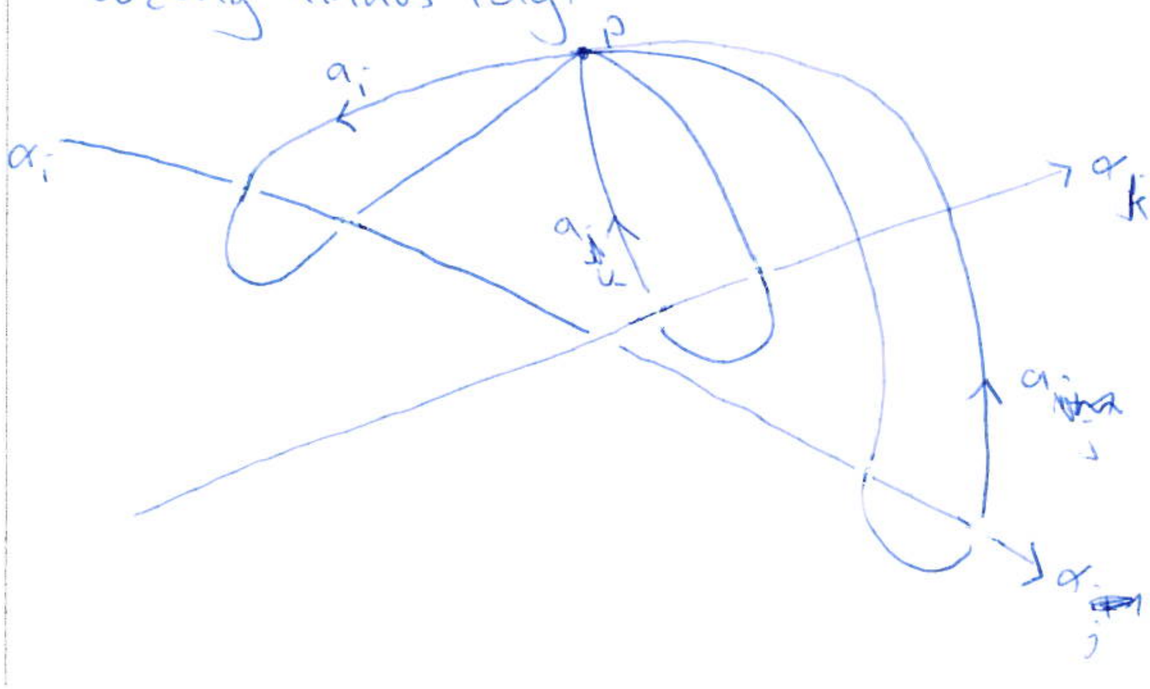
Beweis der Wirtinger-Darstellung:

- Projektion eines Knoten K auf die Ebene derart, dass es höchstens Doppelpunkte (als Kreuzungen) gibt. Im Fall eines Doppelpunktes muss angegeben werden, welcher ~~Zweig~~ Bogen von K dabei oben ist (reguläre Projektion)

- $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ ist gegeben durch Schleifen a_i durch diese Knotenbögen

Folglich hat man genau so viele Erzeuger wie es Kreuzungen gibt. Wir wählen eine Orientierung für den Knoten K und orientieren dann nach der Rechte-Hand-Regel die Erzeuger a_i um die Bögen α_i

~~Es~~ Es ist auch sinnvoll die Indizierung so anzuordnen, dass dem unteren Bogen α_i in eine Kreuzung hinein der Bogen α_j aus der Kreuzung hinaus folgt



Beweis des Algorithmus (~~benötigt~~ braucht den Satz von Seifert-van-Kampen) : 6

Wir können annehmen, dass jeder Bogen α_i des Knotens K in der Ebene $z=1$ liegt, abgesehen von einem vertikalen Teilstück an jedem Bogenende (auf Höhe der Kreuzungen), welche nach $z=0$ heruntergeht. Der Endpunkt von α_i kann dann mit dem Anfangspunkt von α_{i} ~~und~~ durch das Bogenstück β_{k} in der Ebene $z=0$ verbunden werden, das unter dem ~~Bogen~~ oberen Bogen der Kreuzung α_j verläuft ~~. Wir nehmen dann das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus N$ wobei nehm~~

~~Man~~ ~~nimmt~~ definiert ~~von N~~, ~~die~~ eine ~~Umgebung des Knotens K~~

Man definiert nun N, eine Quader-Umgebung des Knotens K mit Seitenlänge ε, deren Mittelpunkt auf K liegt und wobei ε klein ~~genug ist um sicherzustellen, dass $\mathbb{R}^3 \setminus N$ ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^3 \setminus K$ ist, d.h.~~

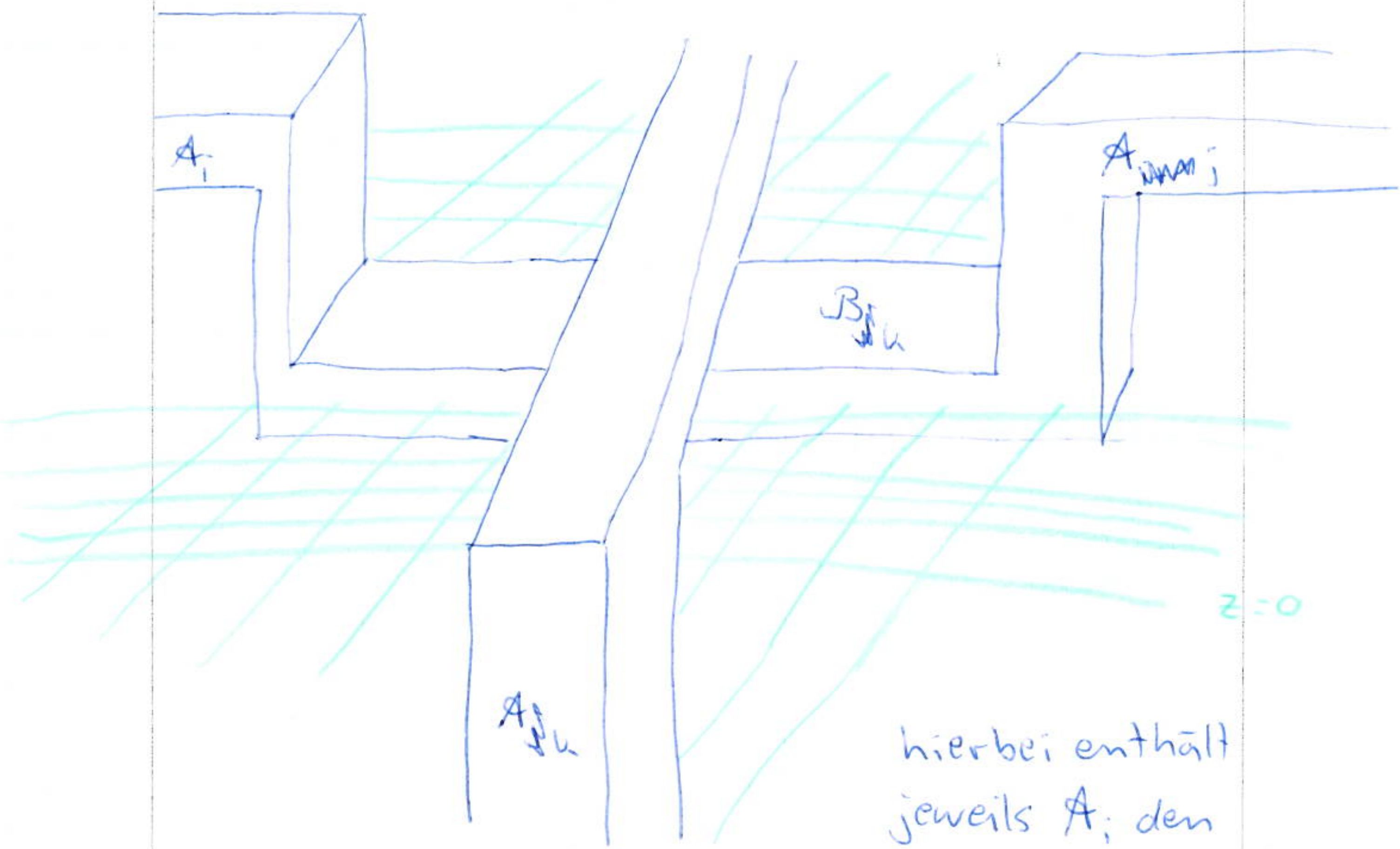
Deformationsretrakt ist Spezialfall von Homotopieäquivalenz

X, Y homot.-äquiv.

$\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, f: X \to Y$ stetig
$g: Y \to X$ "

s.d. $f \circ g \sim id_Y$
$g \circ f \sim id_X$

homotop



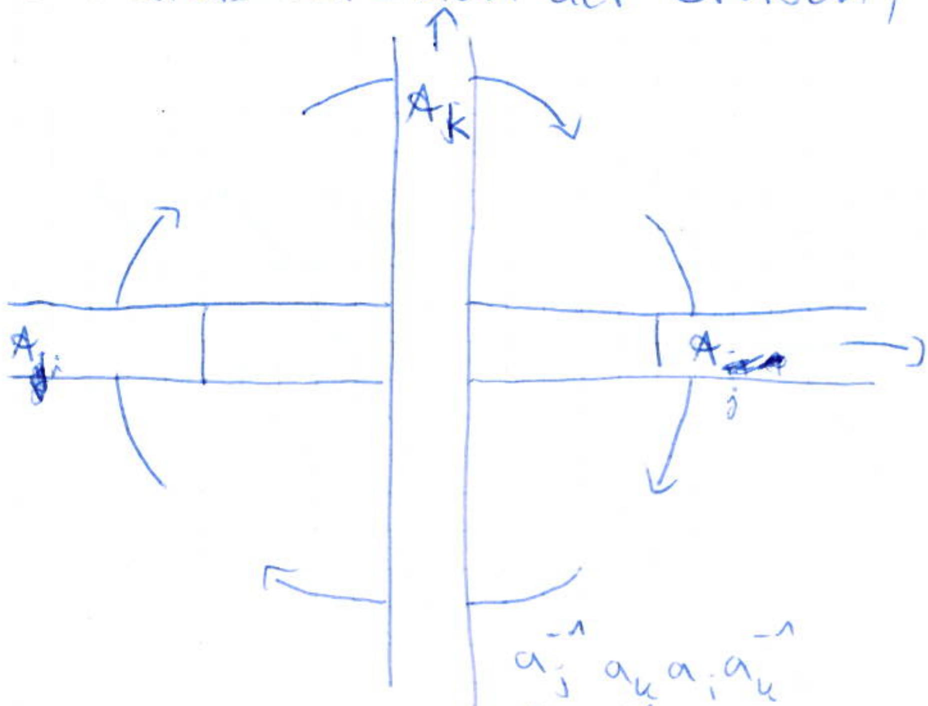
hierbei enthält jeweils A_i den Knotenbogen α_i

- Man definiert $A = \{z > 0\} \setminus N$
  Nun umkreisen $a_1, \dots, a_n$ den verdickten Knotenbogen, wobei a_i die Schleife ist, die um den Tunnel A_i verläuft
- Man definiert $B = \{z < \frac{\varepsilon}{2}\} \setminus N$ ist ein offener Halbraum mit „Gräben" an den Stellen der B_{j_k}-Tunnel. B ist einfach zusammenhängend, d.h. $\pi_1(B) = \{1\}$
  Legt man Schleifen in B, so können diese stets an den Gräben „vorbeigezogen" werden und sind damit nullhomotop.
- $A \cap B = \{0 < z < \frac{\varepsilon}{2}\} \setminus N$ ist eine unendliche verdickte Ebene mit n Löchern an den Stellen der B_{j_k}-Gräben (die obere Hälfte der

Gräben)

Daher gilt $\pi_1(A \cap B)$ = freie Gruppe mit n Erzeugern

Der typische Erzeuger von $\pi_1(A \cap B)$ ist ein Kreis um einen der Gräben,

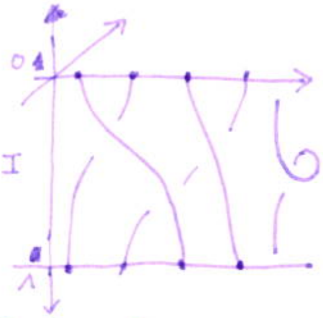


hat also die Form $a_j^{-1} a_k a_i a_k^{-1}$ in $\pi_1(A)$ oder $a_j^{-1} a_k^{-1} a_i a_k$ im Fall der zweiten Art der Kreuzung von vorhin und 1 bei $\pi_1(B)$. Mit dem Satz von Seifert-van-Kampen erhält man dann die Wirtinger-Darstellung für

$$\pi_1(A \cup B) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus N) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$$

Gruppenstruktur auf Knoten? Nein. 18.10.2013

↳ #



<u>Def:</u> Ein <u>geometrischer Zopf</u> auf $n \geq 1$ Strängen ist eine Teilmenge $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$ mit $b = \coprod_{i=1}^{n} I_i$, I_i homöomorph zu Intervall I s.d.

(1) $\mathbb{R}^2 \times I \to I$ gibt Homöo. $I_i \xrightarrow{\cong} I$

(2) $b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(1,0,0), (2,0,0), \dots, (n,0,0)\}$

$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(1,0,1), \dots, (n,0,1)\}$

<u>Def:</u> b, b' Zöpfe, $b \sim b' \iff \exists F \quad b \times I \to \mathbb{R}^2 \times I$ stetig s.d. $\forall s \in I$

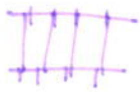
- $F_s : b \to \mathbb{R}^2 \times I$ ist Einbettung
- $F_s(b)$ ist ein geometrischer Zopf auf n Strängen
- $F_0 = id_b$, $F_1(b) = b'$

<u>Bem:</u> $\sim$ ist Äquivalenzrelation $\Rightarrow \mathbb{B}_n := \{$geom. Zöpfe auf n Strängen$\}/_\sim$

<u>Multiplikation:</u> b_1, b_2 Zöpfe auf n Strängen

$b_1 b_2 = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times I \mid (x,y,2t) \in b_1$ für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ und

$(x,x,2t-1) \in b_2$ für $\frac{1}{2} \leq t \leq 1\}$

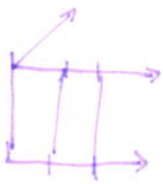
$\Rightarrow$ Multiplikation auf $\mathbb{B}_n$, assoziativ, neutrales Element: 1_n 

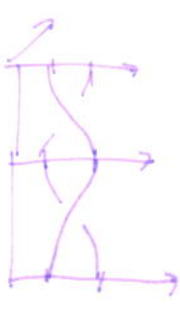
<u>Verallgemeinerung:</u> $\Sigma^n \setminus \Delta$

↳ fette Diagonale $(x_1, \dots, x_n)$ s.d. $x_i = x_j$ für min. ein (i,j), $i \neq j$

$\rightsquigarrow$ Zopfgruppen $\sim \pi_1(\Sigma^n \setminus \Delta, p)$

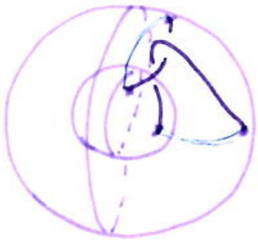
$B_2 \cong \mathbb{Z}$





$B_3 = \langle A, B \mid ABA = BAB \rangle$

$S^2 \times I$



$\pi_1((S^2)^n \setminus \Delta) \simeq 1$

Zopfdiagramme: $\mathbb{R}^2 \times I \quad (x,y,t) \quad b$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$\mathbb{R} \times I \quad (x,t) \quad D(b)$

nach kleiner Isotopie sind diese regulär

max. Doppelpunkte und diese sind transversal

Def: D, D' Zopfdiagramme $D \sim D' \Leftrightarrow \exists F\; D b \times I \to \mathbb{R}^1 \times I$ stetig s.d. $\forall s \in I$

- $F_s : D \to \mathbb{R} \times I$ ist Einbettung
- $F_s(D)$ ist ein geom. Zopfdiagramm auf n Strängen
- $D_0 = D$, $D_1 = D'$ + Bed. an die Kreuzungen

Satz: b_1, b_2 Zöpfe $b_1 \sim b_2 \Leftrightarrow D(b_1) \sim D(b_2) \Leftrightarrow D(b_1)$ und $D(b_2)$ unterscheiden sich nur durch Reidemeister II und III + Umgebungshomotopien

2 1 3

Lemma: $\mathbb{B}_n \cong \langle b_1, \dots, b_{n-1} \mid \text{Zopfrelation} \rangle$

siehe Beweis

!!

Artin Zopfgruppe

Bew: $[b] \in \mathbb{B}_n \rightsquigarrow D(b)$ reg.

alle Segmente haben Form

$1 \;..\; k \quad k+1 \;..\; n$

$\sim D(b_k^+)$

$\rightsquigarrow D(b_k^-)$

$\Rightarrow b = b_{i_1}^{\varepsilon_1} b_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots b_{i_k}^{\varepsilon_k}$

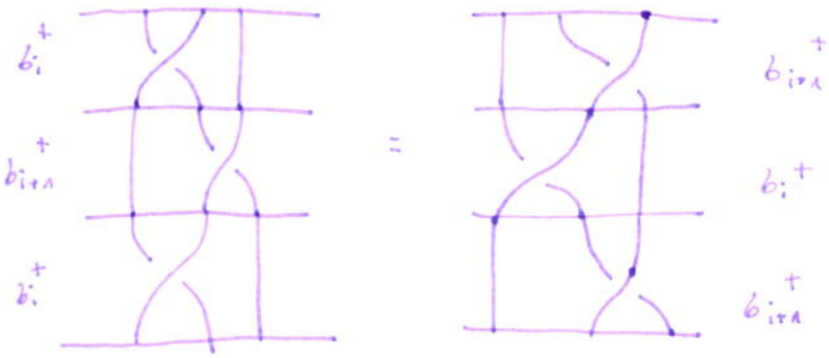
1. $b_i^+ b_i^- =$  $=$  $= 1_n = b_i^- b_i^+$

$\rightsquigarrow b^{-1} = b_{i_k}^{-\varepsilon_k} b_{i_{k-1}}^{-\varepsilon_{k-1}} \dots b_{i_1}^{-\varepsilon_1} \rightsquigarrow \mathbb{B}_n$ Gruppe

2. $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{n-1}^+ \in B_n$ erfüllen Zopfrelationen

nicht benachbart

$$\begin{cases} \sigma_i^+ \sigma_j^+ = \sigma_j^+ \sigma_i^+ & i,j = 1,\dots,n-1 \quad |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ = \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ & \end{cases}$$



3. Schritt: $\varphi^+ : B_n \to B_n$ $\qquad B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \text{Zopfrel.} \rangle$

$\sigma_i \mapsto \sigma_i^+$

- Gruppenhomo
- surjektiv
- injektiv

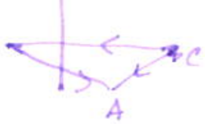
$\square$

Zöpfe $\longrightarrow$ Verschlingung in $\mathbb{R}^3$

$D^2 \times I \to D^2 \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$

Satz von Alexander: Jede Verschlingung ist isotop zu geschl. Zopf

Bew: $\rightsquigarrow$ polynomial



($\square$)

Satz (Markov): 2 Zöpfe haben isotope Abschlüsse im $\mathbb{R}^3$ $\Longleftrightarrow$ Sie unterscheiden sich durch Umgeb. hom. + Markov Züge M_1 u. M_2

M_1: Konjugation mit Zopf

M_2: $b^{\in B_n} \longrightarrow \sigma_n(b)$