Pizzaseminar zu erzeugenden Funktionen

20. Februar 2014

in Entstehung befindlich

0.1 Multivariate erzeugende Funktionen

Allgemeines Verfahren:

1. Schritt: Geeignete Rekursion finden

2. Schritt: Erzeugende Funktion erstellen

3. Schritt: Rekursion für Funktion

4. Schritt: Formel auflösen

Geeignete Funktionen für den 2. Schritt (für den Fall zweier Variablen):

$$\psi(x,y) = \sum_{n,k\geq 0} a_{n,k} x^n y^k$$

$$\phi(x,y) = \sum_{n,k\geq 0} a_{n,k} \frac{x^n}{n!} \frac{y^k}{k!}$$

$$\theta(x,y) = \sum_{n,k\geq 0} a_{n,k} \frac{x^n}{n!} y^k$$

Beispiel 0.1. Der Binomialkoeffizient

$$f(n,k) := \binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

entspricht der Anzahl der k-elementigen Teilmengen der n-elementigen Menge $\{1,\ldots,n\}$.

1. Schritt Eine k-elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,n\}$ ist entweder auch eine k-elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,n-1\}$ (wenn n nicht in der Teilmenge enthalten ist) oder eine $(k-1)$-elementige Teilmenge von $\{1,\dots,n-1\}$ vereinigt mit $\{n\}$. Somit erhält man die Rekursion:

$$\begin{aligned} f(n,k) &:= f(n-1,k) + f(n-1,k-1), && n,k \geq 1 \\ f(0,k) &:= 0, && k \geq 1 \\ f(n,0) &:= 1 && n \geq 0 \end{aligned}$$

2. Schritt

$$\psi(x,y) := \sum_{n,k\geq 0} f(n,k) x^n y^k$$

3. Schritt

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= \sum_{n,k\geq 0} f(n,k)x^n y^k = \\ &= \sum_{k\geq 1} f(0,k)x^0 y^k + \sum_{n\geq 1} f(n,0)x^n y^0 + \sum_{n,k\geq 1} f(n,k)x^n y^k = \\ &= 0 + \frac{1}{1-x} + \sum_{n,k\geq 1} f(n-1,k)x^n y^k + \sum_{n,k\geq 1} f(n-1,k-1)x^n y^k = \\ &= \frac{1}{1-x} + x\sum_{n,k\geq 0} f(n,k)x^n y^k - \sum_{n\geq 0} f(n,0)x^n y^0 + xy\sum_{n,k\geq 0} f(n,k)x^n y^k = \\ &= \frac{1}{1-x} + x\psi(x,y) - \frac{x}{1-x} + xy\psi(x,y) = x\psi(x,y) + xy\psi(x,y) \end{aligned}$$

4. Schritt Umformen von

$$\psi(x,y) = x\psi(x,y) + xy\psi(x,y)$$

ergibt

$$\psi(x,y)(1-x-xy) = 1$$

und damit die erzeugende Funktion

$$\psi(x,y) = \frac{1}{1-x-xy}$$

Was passiert nun, wenn eine Variable fest ist?

1. Fall: n fest

$$
\begin{aligned}
B_n(y) &= \sum_{k\geq 0} f(n,k)y \\
x^k f(n,k) &= x^k f(n-1,k) + x^k f(n-1,k-1) \\
B_n(x) &= \sum_{k\geq 0} x^k f(n,k) = \sum_{k\geq 0} x^k f(n-1,k) + \sum_{k\geq 0} f(n-1,k-1)x^k = \\
&= B_{n-1}(x) + xB_{n-1}(x) \\
\Rightarrow B_n(x) &= (1+x)B_{n-1}(x) \\
\Rightarrow B_n(x) &= (1+x)^n \\
\Rightarrow f(n,k) &= [x^k](1+x)^n = \left.\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(1+x)^{n-k}}{k!}\right|_{x=0} = \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}
\end{aligned}
$$

2. Fall: k fest

$$
F_k(x) = \sum_{n\geq 0} \binom{x}{k} x^n = [y^k]\psi(x,y) = [y^k]\frac{1}{1-x-xy} = \frac{1}{1-x}[y^k]\frac{1-x}{1-x-xy} = \dots = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}
$$

$$
\theta(x,y) = \sum_{n,k\geq 0} f(n,k)\frac{x^n}{n!}y^k = \sum_{n,k\geq 0} \binom{x}{k}\frac{x^n}{n!}y^k = ???
$$

Beispiel 0.2 (Delannoy-Zahlen)**.** Die Delannoy-Zahl $\omega_{n,k}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an in einem kartesischen Koordinatensystem vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt (n,k) zu gelangen. Dabei sind nur Schritte nach rechts, rechtsoben und oben erlaubt:

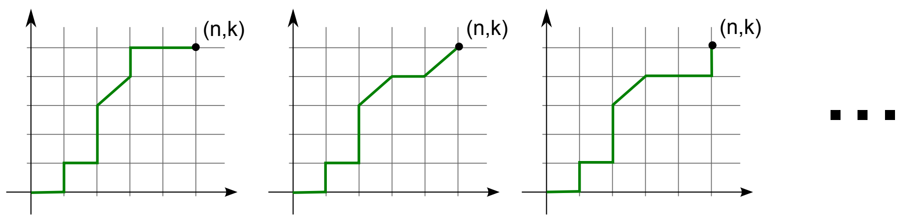

Abbildung 1: Verschiedene Wege vom Ursprung zum Punkt (n,k)

1. Schritt Um eine Rekursionsformel für $\omega_{n,k}$ zu erhalten, betrachte alle Wege, die vom Ursprung nach $(n-1,k)$, $(n-1,k-1)$ oder $(n,k-1)$ führen. Von diesen drei Punkten aus wird (n,k) in genau einem Schritt erreicht. Also entspricht die Summe dieser Wege der Zahl aller Wege von $(0,0)$ nach (n,k):

$$
\begin{aligned}
\omega_{n,k} &:= \omega_{n-1,k} + \omega_{n-1,k-1} + \omega_{n,k-1}, && n,k \geq 1 \\
\omega_{0,k} &:= \omega_{n,0} = \omega_{0,0} = 1 && n,k \geq 0
\end{aligned}
$$

2./3. Schritt

$$\begin{aligned}
\psi(x,y) &= \sum_{n,k\geq 0} \omega_{n,k} x^n y^k \\
&= \omega_{0,0} + \sum_{n\geq 1} \omega_{n,0} x^n + \sum_{k\geq 1} \omega_{0,k} y^k \\
&\quad + \sum_{n,k\geq 1} \omega_{n-1,k} x^n y^k + \sum_{n,k\geq 1} \omega_{n-1,k-1} x^n y^k + \sum_{n,k\geq 1} \omega_{n,k-1} x^n y^k \\
&= 1 + \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} \\
&\quad + x \sum_{n,k\geq 0} \omega_{n,k} x^n y^k - x \sum_{n\geq 0} \omega_{n,0} x^n + xy \sum_{n,k\geq 0} \omega_{n,k} x^n y^k + y \sum_{n,k\geq 0} \omega_{n,k} x^n y^k - y \sum_{k\geq 0} \omega_{0,k} y^k \\
&= 1 + \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + x\psi(x,y) - \frac{x}{1-x} + xy\psi(x,y) + y\psi(x,y) - \frac{y}{1-y} \\
&= 1 + x\psi(x,y) - xy\psi(x,y) + y\psi(x,y)
\end{aligned}$$

4. Schritt

$$\Rightarrow \psi(x,y) = \frac{1}{1-x-y-xy}$$

Beispiel 0.3 (Stirlingzahlen 2. Art)**.** Die Stirlingzahlen 2. Art sind wie folgt definiert:

$$S(n,k) := \left\{ {n \atop k} \right\} := \text{ Anzahl der Partitionen einer } n\text{-elementigen Menge in } k \text{ Teile (nicht-leere Mengen)}$$

Beispielsweise ist

$$\{1,2\},\ \{13\},\ \{3,5,8,12\},\ \{4,6\},\ \{7,9,10,11\}$$

eine mögliche Partition von $\{1,\dots,13\}$ in 5 Teile.

1. Schritt Eine k-Partition von $\{1,\dots,n\}$ erhält man entweder aus einer k-Partition von $\{1,\dots,n-1\}$ durch Hinzufügen von n in eine der k Partitionen oder aus einer $(k-1)$-Partition von $\{1,\dots,n-1\}$ durch Hinzufügen von $\{13\}$ als eigener Menge:

$$\begin{aligned}
&\left\{ {n \atop k} \right\} := k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}, && n,k \geq 1 \\
&\left\{ {0 \atop k} \right\} := 0,\ \left\{ {n \atop 0} \right\} := 0, && n,k \geq 1 \\
&\left\{ {0 \atop 0} \right\} := 1
\end{aligned}$$

2./3. Schritt

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(x,y) &= \sum_{k,n\geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} y^k = 1 + \sum_{k,n\geq 1} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} y^k = \\ &= 1 + \sum_{k,n\geq 1} k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} y^k + \sum_{k,n\geq 1} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \frac{x^n}{n!} y^k = \\ &= 1 + \sum_{n,k\geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} y^k + y \sum_{n,k\geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} y^k = \\ &= y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_0^x \mathfrak{L}(x,y) \mathrm{d}x + y \int_0^x \mathfrak{L}(x,y) \mathrm{d}x\end{aligned}$$

4. Schritt Wende auf beide Seiten $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ an

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathfrak{L}(x,y) = y \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \mathfrak{L}(x,y) + \mathfrak{L}(x,y) \right)$$

substituiere $\mathfrak{L}(x,y) = e^{f(x,y)}$ und teile durch $e^{f(x,y)}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,y) = y \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x,y) + 1 \right)$$

Substituiere $f(x,y) = g(x,y) - y$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x,y) = y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g(x,y)$$

Substituiere $g(x,y) = u(x)v(y)$:

$$u'(x)v(y) = yu(x)v'(y)$$

$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = y \frac{v'(y)}{v(y)}$$

$$\Rightarrow u(x) = ce^x, \ v(y) = y$$

Daraus ergibt sich $g(x,y) = cye^x$, also $f(x,y) = cye^x - y$ und somit:

$$\mathfrak{L}(x,y) = e^{f(x,y)} + K = e^{cye^x - y} - y + K$$

Aus den Anfangsbedingung folgt $K = 0$ und $c = 0$, also:

$$\mathfrak{L}(x,y) = e^{y(e^x - 1)}$$

Damit ergibt sich auch die Erzeugende für die Bell-Zahlen:

$$\mathfrak{L}(x,1) = e^{(e^x - 1)}$$