Schattenkalkül

Matthias Hutzler

$\mathcal{P}$: Vektorraum der Polynome in x über $\mathbb{K}$

$\mathcal{F}$: Algebra der formalen Potenzreihen in t über $\mathbb{K}$

Für $f(t) \in \mathcal{F}$, $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ schreibe $\langle f(t) \mid x^n \rangle := a_n$
(definiert Funktional auf $\mathcal{P}$)

Beispiel: $\langle e^{yt} \mid p(x) \rangle = \langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n t^n}{n!} \mid p(x) \rangle = p(y)$

Satz: Seien $f(t), g(t) \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\langle f(t) g(t) \mid x^n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle f(t) \mid x^k \rangle \cdot \langle g(t) \mid x^{n-k} \rangle$$

Notation: Für $f \in \mathcal{F}$, $f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ schreibe

$$o(f(t)) = o(f) = \inf \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0 \} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

(α) Satz: Sei $(f_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$ mit $\forall k \in \mathbb{N}: o(f_k(t)) = k$ und $p(x), q(x) \in \mathcal{P}$. Dann gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}: \langle f_k(t) \mid p(x) \rangle = \langle f_k(t) \mid q(x) \rangle \iff p(x) = q(x)$$

Beweis: Für alle $n \geq 0$ existiert $a_{n,k}$, sodass $t^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} f_k(t)$

$$\langle t^n \mid p(x) \rangle = \langle \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} f_k(t) \mid p(x) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \langle f_k(t), p(x) \rangle =$$

$$= \langle t^n \mid q(x) \rangle. \qquad \square$$

Beispiele:
- $\langle e^{yt} - 1 \mid p(x) \rangle = p(y) - p(0)$
- $\langle t e^{yt} \mid x^n \rangle = \langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} t^{k+1} \mid x^n \rangle = n y^{n-1}$

$$\Rightarrow \langle t e^{yt} \mid p(x) \rangle = p'(y)$$

Definition: Potenzreihen in t als Operatoren auf $\mathcal{P}$:

$$t x^n := \begin{cases} n x^{n-1}, & \text{für } n > 0 \\ 0, & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

Multiplikation in $\mathcal{F}$ soll Verkettung von Operatoren entsprechen, also:

$$t^k x^n = \begin{cases} n^{\underline{k}} x^{n-k}, & \text{für } k \leq n \\ 0, & \text{für } k > n \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f(t) \mid x^k \rangle}{k!} t^k$$

Satz: Seien $f(t), g(t) \in \mathcal{F}$, dann gilt für alle $p(x) \in P$:

$$\langle f(t) g(t) \mid p(x) \rangle = \langle g(t) \mid f(t) p(x) \rangle$$

Beweis:

$$\langle g(t) \mid f(t) x^n \rangle = \langle g(t) \mid \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle f(t) \mid x^k \rangle \cdot x^{n-k} \rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle f(t) \mid x^k \rangle \cdot \langle g(t) \mid x^{n-k} \rangle =$$

$$= \langle f(t) g(t) \mid x^n \rangle$$

Korollar: $\langle f(t) \mid p(x) \rangle = \langle 1 \mid f(t) p(x) \rangle = (f(t) p(x))\big|_{x=0}$

Definition: Sei $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in P mit $\forall n \in \mathbb{N}: \deg s_n = n$. Dann heißt $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ Sheffer-Sequenz zu $(g(t), f(t))$, wenn gilt:

$$\left. \begin{aligned} &o(g(t)) = 0, \quad o(f(t)) = 1, \quad \forall n,k: \langle g(t) f(t)^k \mid s_n(x) \rangle \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = n! \cdot \delta_{n,k} \end{aligned} \right\} (*)$$

Vereinfachungen:

- Wenn $g(t) = 1$, so heißt $s_n(x)$ mit $(*)$ assoziierte Sequenz zu $f(t)$.
- Wenn $f(t) = t$, so heißt $s_n(x)$ mit $(*)$ Appell-Sequenz zu $g(t)$.

Satz: Zu $f(t), g(t) \in \mathcal{F}$ mit $o(g(t)) = 0$, $o(f(t)) = 1$ existiert eine eindeutige ~~Sheffer~~ Sheffer-Sequenz $(s_n(x))$

Beweis: Eindeutigkeit folgt aus dem Satz α mit $f_k(t) = g(t) f(t)^k$.

Zur Existenz:

$$s_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j, \quad g(t) f(t)^k = \sum_{i=k}^{\infty} b_{k,i} t^i \quad (b_{k,k} \neq 0)$$

$$n! \cdot \delta_{n,k} = \langle \sum_{i=k}^{\infty} b_{k,i} t^i \mid \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j \rangle = \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} b_{k,i} a_{n,j} \langle t^i | x^j \rangle =$$

$$= \sum_{i=k}^{n} b_{k,i} a_{n,i} \cdot i!.$$ Mit $k=n$ folgt $a_{n,n} = \frac{1}{b_{n,n}}$.

Mit $k=n$, $k=n-1$, ... erhält man nacheinander alle $a_{n,j}$.

<u>Satz</u> (Expansionstheorem)

Ist $s_n(x)$ Sheffer-Sequenz zu $(g(t), f(t))$, dann gilt:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | s_k(x) \rangle}{k!} g(t) f(t)^k \quad \forall h(t) \in \mathcal{F}$$

<u>Beweis</u>: $$\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t), s_k(x) \rangle}{k!} g(t) f(t)^k \mid s_n(x) \rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | s_k(x) \rangle}{k!} \langle g(t) f(t)^k | s_n(x) \rangle = \langle h(t) | s_n(x) \rangle$$

$\Rightarrow$ Behauptung, da $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von P ist.

<u>Satz</u> (Sheffer-Identität)

$(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist Sheffer-Sequenz zu $(g(t), f(t))$ für gewisses $g(t) \in \mathcal{F}$ genau dann wenn

$$s_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(y) s_{n-k}(x),$$

wobei $(p_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ die assoziierte Sequenz zu f ist.

<u>Beweis</u>: „$\Rightarrow$" Nach Expansionstheorem ist $e^{yt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(y)}{k!} f(t)^k$.

Dann gilt für alle $y \in \mathbb{K}$: $s_n(x+y) = e^{yt} s_n(x) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(y)}{k!} f(t)^k s_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} p_k(y) s_{n-k}(x)$$

Satz (Appell-Identität)

Sei $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Appell-Sequenz zu $g(t)$, dann:

$$s_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_k(y)\, x^{n-k}$$

Beispiele:

- $p_n(x) = x^n$ ist assoziierte Sequenz zu $f(t) = t \quad (g(t) = t)$.
  (so liefert Sheffer-Identität Binomische Formel)
- $p_n(x) = x^{\underline{n}}$ ist assoziierte Sequenz zu $f(t) = e^t - 1 \quad (g(t) = 1)$
  Erzeugende Funktion:
  $$e^{x\ln(1+t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} t^k$$
- Abel-Polynome: $A_n(x;a) = x(x-an)^{n-1}$ sind assoziiert zu $f(t) = te^{at}$.
- Laguerre-Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ sind Sheffer-Sequenz zu: $g(t) = (1-t)^{-\alpha-1}$, $f(t) = \frac{t}{1-t}$

Satz: Ist $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Sheffer-Sequenz zu $(g(t), f(t))$, dann $f(t)\, s_n(x) = n \cdot s_{n-1}(x)$.

Beweis: $\langle g(t) f(t)^k \mid f(t) s_n(x)\rangle = \langle g(t) f(t)^{k+1} \mid s_n(x)\rangle$

$= n! \cdot \delta_{n,k+1} = n \cdot (n-1)!\, \delta_{n-1,k} = n \cdot \langle g(t) f(t)^k \mid n \cdot s_{n-1}(x)\rangle$

$\Rightarrow$ Behauptung, da $g(t) f(t)^k$ Pseudo-Basis von $\mathcal{F}$.

Beispiel • Hermit-Polynome sind Appell-Sequenz zu $g(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$