Formel von Faà di Bruno

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)\frac{x^n}{n!}$$

e.g.f.

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} g(n)\frac{x^n}{n!}$$

Ziel: Erzeugende Fkt. von $G\circ F$

<u>Erinnerung</u>: Produkt von e.g.f.'s:

$$H(x) = F(x)\cdot G(x)$$

mit $H(x) = \sum_{n\geq 0} h(x)\frac{x^n}{n!}$ mit $h(n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f(k)\, g(n-k)$

$$h(\#X) = \sum_{\substack{(S,T)\\ S\cap T=\emptyset\\ S\cup T = X}} f(\#S)\, g(\#T)$$

<u>allgemeiner</u>: $F_1,\dots,F_k$ e.g.f.'s

$\rightsquigarrow H(x) = \prod_{i=1}^{k} F_i(x)$ hat Koeffizienten $h(\#X) = \sum_{\substack{(T_1,\dots,T_k)\\ T_i\cap T_j=\emptyset\\ \bigcup_i T_i = X}} f_1(\#T_1)\cdot\ldots\cdot f_k(\#T_k)$

<u>Satz</u>: Kompositionsformel)

$f : \mathbb{N}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n\geq 1} f(n)\frac{x^n}{n!}$

$\Updownarrow$ $f(0)=0$

$g(0)=1$

$H(x) := G(F(x))$

hat Koeffizienten $\underbrace{h(\#X)}_{>0} = \sum_{\{B_1,\dots,B_k\}\in\Pi(X)} f(\#B_1)\cdot\ldots\cdot f(\#B_k)\cdot g(k)$

$h(0)=1$

$\Pi(X) =$ Partitionen von X

$B_1 \cup \ldots \cup B_k = X$

$B_i \cap B_j = \emptyset \quad , B_i \neq \emptyset$

<u>Bew.</u>: $n = \# X$

Schreibe rechte Seite als $\sum_k h_k(n)$

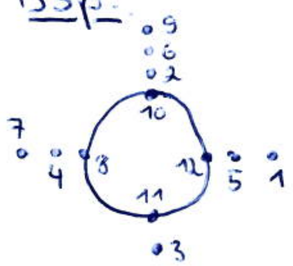
d.h. $h_k(n) = \sum_{\substack{k \text{ hat} \\ \{B_1, \ldots, B_k\} \in \Pi(X)}} f(\# B_1) \cdots f(\# B_k)\, g(k)$

$\underset{\text{Formel}}{\overset{\text{Prod.-}}{\rightsquigarrow}} H_k(x) = F(x)^k \cdot \frac{1}{k!}\, g(k)$

$$\rightsquigarrow H(x) = \sum_k H_k(x) = \sum_k \frac{g(k) \cdot F(x)^k}{k!} = G \circ F(x)$$

$\square$

<u>Bsp.</u>:



Auf wie viele Arten kann man n Personen im (nicht-leeren) Reihen anordnen, und diese Reihen im Kreis?

<u>Def.</u>: $f(j) = j!$ (Anordnung in einer Reihe) $\quad f(0) = 0$

$g(k) = (k-1)!$ (Anordnungen im Kreis) $\quad g(0) = 1$

<u>gesucht</u>: $H(x) = G \circ F(x)$

$$F(x) = \sum_{n \geq 1} n! \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1-x}$$

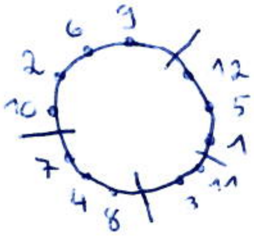
$$G(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = 1 + \overbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}}^{-\ln(1-x)}$$

$$H(x) = G \circ F(x) = 1 - \ln\Big(\underbrace{1 - \frac{x}{1-x}}_{\frac{1-2x}{1-x}}\Big) = 1 \underbrace{- \ln(1-2x)}_{\sum_{n \geq 1} \frac{(2x)^n}{n}} + \underbrace{\ln(1-x)}_{-\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}}$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{n}}}_{\frac{(n-1)!}{n!}} (2^n - 1)\, x^n$$

$$\rightsquigarrow h(n) = (n-1)!\,(2^n - 1)$$

Einfache Interpretation:



- $(n-1)!$ Mögl. die Personen im Kreis anzuordnen
- $(2^n - 1)$ Mögl. für Trennstriche

Umformulierung der Kompositionsformel:

$$h(\underset{\substack{\| \\ \#X}}{n}) = \sum_k \sum_{\{B_1,\dots,B_k\} \in \Pi(X)} f(\#B_1)\cdots f(\#B_k)\, g(k)$$

$m_i = \#\{B_j \text{ mit genau } i \text{ Elementen}\}$

$$k = \sum_i m_i \qquad = \sum_{\substack{(m_1,\dots,m_n) \\ 1m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + nm_n = n}} \frac{n!}{m_1!(1!)^{m_1}\cdots m_n!(n!)^{m_n}}\, f(1)^{m_1} \cdots f(n)^{m_n} \cdot g\Big(\sum_i m_i\Big)$$

$\rightsquigarrow$ Formel von Faà di Bruno:

$$\frac{d^n}{dx^n}\Big|_{x=0} g(f(x)) = \sum_{\substack{(m_1,\dots,m_n) \\ 1m_1 + \dots + nm_n = n}} \frac{n!}{m_1!(1!)^{m_1}\cdots m_n!(n!)^{m_n}}\, g^{(m_1 + \dots + m_n)}(f(0)) \cdot f^{(1)}(0)^{m_1} \cdot f^{(2)}(0)^{m_2} \cdots f^{(n)}(0)^{m_n}$$

Korollar: (Exponentialformel)

$f(0) = 0$

$H = \exp(F(x))$

hat Koeff. $h(\#X) = \sum_{\{B_1,\dots,B_k\} \in \Pi(X)} f(\#B_1)\cdots f(\#B_k)$ $\qquad h(0) = 1$

<u>Bsp.</u>: # zusammenhängende Graphen mit n Ecken?

$$\#\text{ Graphen mit } n \text{ Ecken} = \underset{\displaystyle h(n)}{\overset{\displaystyle 2^{\binom{n}{2}}}{\|}}$$

<u>gesucht</u>: $f(n)$

$f(0)=0$

der

$$\rightsquigarrow \underset{\displaystyle \sum_{n\geq 0} h(n)\frac{x^n}{n!}}{\overset{\displaystyle H(x)}{\|}} = \exp(F(x)) = \exp\Big(\sum_{n\geq 1} f(n)\frac{x^n}{n!}\Big)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} f(n)\frac{x^n}{n!} = \ln\Big(\sum_{n\geq 0} 2^{\binom{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!}\Big)$$

<u>Ziel</u>: Finde Inverses zur Potenzreihe $f(x) = a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots$

<u>Prop.</u>: f invertierbar $\Leftrightarrow a_1 \neq 0$

<u>Bew.</u>: Ang. $g(x) = b_1x + b_2x^2 + \ldots$ mit $(f\circ g)(x) = x$

$$\Leftrightarrow a_1(b_1x^1 + b_2x^2 + \ldots) + a_2(b_1x + b_2x^2 + \ldots)^2 + a_3(b_1x + \ldots)^3 + \ldots = x$$

$$\Rightarrow a_1b_1 = 1,\quad a_1b_2 + a_2b_1^2 = 0,\quad a_1b_3 + a_2 2b_1b_2 + a_3b_1 = 0, \ldots$$

$\square$

<u>Satz</u>: (Lagrange Inversionsformel)

$$n\cdot[f^{(-1)}(x)]_n = \Big[\frac{1}{f(x)^n}\Big]_{-1}$$

Koeff. von x^n

<u>allg.</u>: $$n\cdot\big[f^{(-1)}(x)^k\big]_n = k\cdot\Big[\frac{1}{f(x)^n}\Big]_{-k}$$

Bew.: $f^{(-1)}(x) = \sum_{i \geq 1} p_i x^i$

$$\rightsquigarrow x = \sum_{i \geq 1} p_i f(x)^i$$

$$\rightsquigarrow 1 = \sum_{i \geq 1} i p_i f(x)^{i-1} f'(x)$$

$$\frac{1}{f(x)^n} = \sum_{i \geq 1} i p_i \underbrace{f(x)^{i-n-1} f'(x)}_{\overset{\text{falls } i \neq n}{=} \frac{1}{i-n} \frac{d}{dx}\left(f(x)^{i-n}\right)}$$

Bemerke:

Laurent-Reihe $y = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n x^n$

$$\Rightarrow [y']_{-1} = 0$$

$$\left[\frac{1}{f(x)^n}\right]_{-1} = \overset{i \neq n}{0} + \overset{i=n}{n} p_n \left[f(x)^{-1} f'(x)\right]_{-1} \overset{f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots}{=} n p_n \underbrace{\left[\frac{a_1 + 2a_2 x + \dots}{a_1 x + a_2 x^2 + \dots}\right]_{-1}}_{\frac{1}{x} + \dots} =$$

$$= n p_n = n \left[f^{(-1)}(x)\right]_n$$