Formel von Molien und Pólya-Enumeration

1. Charaktere

Sei G eine endliche Gruppe, die auf Vektorräumen $U, V, \dots$ wirkt, d.h. für alle $g \in G$ gibt es eine Matrix $M_{g,U}$, die auf U durch Multiplikation wirkt. Es soll gelten: $\forall g, g' \in G: M_{g \circ g', U} = M_{g,U} \circ M_{g',U}$

Beispiel: $G = \mathfrak{S}_2 = \{e, \tau\}$

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Interessant: Spur dieser Matrix

Definition: Die Funktion $\chi_U : g \mapsto \operatorname{Spur} M_{g,U}$ heißt <u>Charakter</u> der Darstellung χ_U

Rechenregeln für Charaktere:

$$\chi_U(e) = \dim U$$

$$\chi_{U \oplus V}(g) = \chi_U(g) + \chi_V(g)$$

$$\chi_{U \otimes V}(g) = \chi_U(g) \cdot \chi_V(g) \qquad g \cdot (u \otimes v) = (g \cdot u) \otimes (g \cdot v)$$

$$\chi_{\mathrm{Sym}^k U}(g) = \sum_{i_1 \le \dots \le i_k} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} = h_k(\lambda)$$

$$\chi_{\Lambda^k U}(g) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} = e_k(\lambda) \qquad g \cdot (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = g \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge g e_{i_k}$$

Zwei Darstellungen sind isomorph

$$\Updownarrow$$

Charaktere sind gleich

2. Invarianten

$U^G :=$ Unterraum von U, auf dem G trivial wirkt,

d.h. $\forall u \in U^G: \forall g \in G: \ g \cdot u = u$

Projektionsabbildung: $\underbrace{\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} M_{g,u}}_{=P} : U \to U$

Behauptung: P hat als Bild gerade $U^G \subset U$

Beweis: „Bild $P \subset U^G$". Sei $\omega \in G$

$$M_{\omega,u} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} M_{g,u}\, u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} M_{\underbrace{\omega g}_{=:\tilde{g}},u}\, u = \frac{1}{|G|} \sum_{\tilde{g} \in G} M_{\tilde{g},u}\, u = Pu$$

„$U^G \subset$ Bild P". Sei $u \in U^G$. Dann $\forall g \in G: gu = u$

$$\Rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot u = \frac{|G|}{|G|} u = u \quad \Rightarrow Pu = u$$

Korollar: $\dim U^G = \text{spur}\, P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Spur}\, M_{g,u} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_u(g)$

Frage: Was ist $\dim (\text{Sym}^k U)^G$?

Antwort: $\dim (\text{Sym}^k U)^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Sym}^k(U)}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h_k(\overset{\text{EW von } M_{g,u}}{\lambda})$

(Hilbert-Poincaré-Reihe)

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k \geq 0} t^k \dim (\text{Sym}^k U)^G} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{k \geq 0} t^k h_k({}^g\lambda) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\prod_i (1 - {}^g\lambda_i t)} = \boxed{\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - M_{g,u} t)}}$$

Formel von Molien

Beispiel: $G = \mathfrak{S}_3 = \{id, (12), (23), (13), (123), (132)\}$

$U = \text{span}_K \{x_1, x_2, x_3\} \Rightarrow \text{Sym}^* U = K[x_1, x_2, x_3]$

$(\text{Sym}^* U)^G =$ Ring der sym. Polynome in x_1, x_2, x_3

Formel gibt: $\sum_k t^k \dim (\text{Sym}^k U)^G = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{(1-t)^3} + \frac{3}{(1-t)(1-t^2)} + \frac{2}{1-t^3} \right]$

$= \dots = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$

Allgemeiner: $\mathfrak{S}_d \curvearrowright k[x_1, \dots, x_d]$, $U = \operatorname{span}_k \{x_1, \dots, x_d\}$

$$\sum t^k \dim (\operatorname{Sym}^k U)^{\mathfrak{S}_d} = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^d)} = \sum_k p_d(k) t^k$$

$p_d(k)$: Anzahl der Partitionen von k durch Zahlen, die $\leq d$ sind

Interpretation: $(\operatorname{Sym}^* U)^G$ wird als Algebra frei erzeugt von

1 Erzeuger von Grad 1

⋮ " " " ⋮

⋮ " " " ⋮

d Erzeuger von Grad d

Pólya-Theorem

Sei S eine endliche Menge, $f: S \to X = \{1, \dots, n\}$ Färbung

G sei eine Gruppe von Permutationen auf S.

Zwei Färbungen $f, \tilde{f}$ heißen G-äquivalent, falls $\exists\, \omega \in G$, sodass $f(s) = \tilde{f}(\omega \cdot s)$ für alle $s \in S$.

Frage: Wie viele G-Äquivalenzklassen gibt es?

Definition: Zykel-Indikator-Polynom (symm.)

Für $\omega \in G$ sei $\lambda(\omega)$ der Zykeltyp

Bsp: $\omega = (134)(25)(7)(68)$, dann $\lambda(\omega) = (3, 2, 2, 1)$

(absteigend sortiert, ergibt Partition von $|S|$)

$$Z_G(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\omega \in G} p_{\lambda(\omega)}(x)$$

Thm (Pólya)

Die Anzahl der G-Äquivalenz~~färbungen~~klassen von Färbungen mit φ_1-mal Farbe 1, …, φ_2-mal Farbe 2 ist gleich dem Koeffizienten vor $x_1^{\varphi_1} x_2^{\varphi_2} \dots$ in $Z_G(x)$. Insbesondere ist die Anzahl aller Färbungen gleich $Z_G(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{|S|\text{-mal}})$

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 rote, 2 blaue, 1 gelbe Kugeln auf die Oberfläche eines frei beweglichen Oktaeders zu verteilen?

Antwort ist nicht 60 (da Symmetrien fehlen)

Benötige G: Symmetriegruppe des Oktaeders

$$Z_G(x) = \frac{1}{24}\Big(\underbrace{p_{111111}(x)}_{\text{Identität}} + \underbrace{6p_{411}}_{\substack{90^\circ\text{-Drehung um}\\\text{Achse durch 2 Punkte}}} + \underbrace{3p_{2211}}_{\substack{180^\circ\text{-Drehung um}\\\text{Achse durch 2 Punkte}}} + \underbrace{6p_{222}}_{\text{Rolle vorwärts}} + \underbrace{8p_{33}}_{\text{Rotation eines }\Delta}\Big)$$

$$= 30\, m_{111111} + 15\, m_{21111} + 8 m_{2211} + 6 m_{222} +$$
$$+ 5 m_{3111} + \boxed{3 m_{321}} + 2 m_{33} + 2 m_{411} + 2 m_{42} +$$
$$+ m_{51} + m_6$$

Gesamtzahl aller Färbungen: $p_{111111}(1,1,1,1,1,1) =$
$$= (1+1+1+1+1+1)^6$$