Erzeugende Funktionen in der Wkt-Theorie

ODER: Die Geschichte der Poisson-Henne

(Ingo Blechschmidt)

1. Grundlagen zu wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen

Def Die wsk'erz ~~Fkt~~ einer zufälligen Zählgröße X ist die formale Potenzreihe

diskrete ZG mit Werten in $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$

Bsp: Anzahl „Kopf" bei 10-maligem Münzwurf

$$G_X(s) := E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\, s^k$$

Bsp
- $X =$ konstant c: $\quad G_X(s) = E(s^X) = s^c$
- $X \sim B(1,p)$: $\quad G_X(s) = (1-p) \cdot s^0 + p \cdot s^1 = q + ps \qquad q := 1-p$
- $X \sim \mathrm{Geom}(p)$: $\quad G_X(s) = 0 s^0 + ps^1 + qps^2 + q^2ps^3 + q^3ps^4 + \ldots =$
  (z.B. Anzahl Versuche, bis das erste Mal „Kopf" fällt.)
  $\quad = ps(1 + qs + q^2s^2 + \ldots) = \frac{ps}{1-qs}$
- $X \sim B(n,p)$: $\quad G_X(s) = (q+ps)^n$
- $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$: $\quad G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$
  (z.B. Anzahl radioaktiver Zerfälle in einem bestimmten Zeitintervall)

Bem
- $G_X(0) = P(X=0)$
- $G_X^{(n)}(0) = n! \cdot P(X=n)$
- $G_X(1) = 1$
- für $s \leq 1$ liegt absolute Konvergenz vor:
  $$\sum |P(X=k) \cdot s^k| = \sum P(X=k) \underbrace{|s^k|}_{\leq 1} \leq 1 < \infty$$
- $G_X^{(n)}$ ist ≥ 0 auf $[0,1]$ für alle $n \geq 0$
- G_X ist monoton steigend und konvex auf $[0,1]$

Prop: $E(X \cdot (X-1) \cdot (X-2) \cdot \ldots \cdot (X-r+1)) = G_X^{(r)}(1)$ (r-tes faktorielles Moment)

Bew
$$G_X^{(r)}(1) = \frac{d^r}{ds^r} \sum_{k \geq 0} P(X=k) s^k \Big|_{s=1} = \sum_{k \geq r} k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-r+1) \cdot s^{k-r} P(X=k) \Big|_{s=1}$$
$$= E(X \cdot (X-1) \cdot \ldots \cdot (X-r+1))$$

Kor $E(X) = G_X'(1)$

Kor $\mathrm{Var}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$

Bew $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$

$= E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 =$

$= G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$

2. Operationen mit wsk'erz Fkt

Prop $G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$ für unabhängige ZGen X und Y

Bew $G_{X+Y}(s) = E(s^{X+Y}) = E(s^X \cdot s^Y) \underset{\uparrow}{=} E(s^X) \cdot E(s^Y) =$

s^X, s^Y unabhängig $= G_X(s) \cdot G_Y(s)$

Prop Seien N, $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige zufällige Zählgrößen.

Seien die X_i identisch verteilt.

Setze $S := X_1 + X_2 + \ldots + X_N$.

Dann gilt: $G_S(s) = G_N(\underbrace{G_X(s)}_{\text{wsk'erz Fkt eines/aller } X})$

Bew $G_S(s) = E(s^S) \underset{\text{Unabhängigkeit}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty} P(N=n) \cdot P(X_1 = i_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n = i_n)\, s^{i_1 + \ldots + i_n}$

$= \sum_n P(N=n) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) \cdot s^k \right)^n$

$= G_N(G_X(s))$

Kor $E(S) = G_S'(1) = G_N'(G_X(1)) \cdot G_X'(1) = E(N) \cdot E(X)$

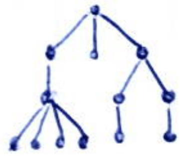
Bsp (Poisson-Henne) (mit unrealistischen Annahmen)

$N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$

$X_i \sim B(1, p)$

$\leadsto S = \sum_{i=1}^{N} X_i =$ Gesamtzahl Küken

3. Galton-Watson-Prozesse



Modell
- Organismen leben für genau eine Zeiteinheit.
- Am Ende ihres Lebens produzieren sie eine gewisse Anzahl C an Nachkommen.
- Aller Organismen sind unabhängig voneinander

Bsp
- Familiennamen
- Y-Chromosomen-Übertragung
- nukleare Kettenreaktion
- Zombie-Ausbrüche

Def
- X_n = Gesamtgröße der n-ten Generation $(X_0 = 1)$
- $e_n := P(X_n = 0)$ = Wsk, dass die Spezies in der n-ten Generation ausgestorben ist

Bem $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton steigend, nach oben durch 1 beschränkt

$\Rightarrow$ es gibt $e \in [0,1]$ mit $e_n \xrightarrow{n\to\infty} e$

es gilt: $e = P\left(\bigcup_{n \geq 0} (X_n = 0)\right)$ = Aussterbewahrscheinlichkeit

Rechne $X_{n+1} = \underbrace{C_1 + \ldots + C_{X_n}}_{\text{unabhängige Kopien von } C}$

$$\Rightarrow G_{X_{n+1}}(s) = G_{X_n}(G_C(s)), \qquad G_{X_0}(s) = s$$

$$\Rightarrow G_{X_n} = \underbrace{G_C \circ \ldots \circ G_C}_{n \text{ Faktoren}}$$

Prop e ist die kleinste nichtnegative Lsg. d. Gleichung $x = G_C(x)$

Bew ① $e_{n+1} = G_{X_{n+1}}(0) = G_C(G_{X_n}(0)) = G_C(e_n)$

$\downarrow n\to\infty$ (Fixpunktsatz von Banach-Tarski) $\downarrow n\to\infty$

$$e = G_C(e)$$

② Sei $\tilde{e}$ bel. nichtnegative Lsg. d. Gleichung „$x = G_C(x)$"

$\tilde{e} \geq 0 \Rightarrow \tilde{e} = G_C(\tilde{e}) \geq G_C(0) = e_0$

$\Rightarrow \tilde{e} = G_C(\tilde{e}) \geq G_C(e_0) = e_1$

$\Rightarrow \tilde{e} \geq e$

Prop Sei $P(C=0) > 0$. Dann:

$$e = 1 \iff \mu := E(C) \leq 1$$

Bew Satz von Rolle