Sven

Enumerative Geometrie

Ziel: Zähle geom. Objekte mit vorgeg. Eigenschaften
∃ viele
so, daß endliche Zahl rauskommt

Bsp.: Wie viele affine Geraden im euklid. Raum gibt es durch 2 Punkte?

→ Genau 1, falls Punkte verschieden

Geht auch mit Ebenen, Kreisen, ...

„Projektivisiere" das ganze und rechne in $\mathbb{CP}^n$

Vorteile:
- Alle Polynome haben ihre Nullstelle
- Kompaktheit

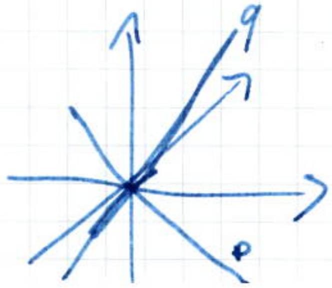
Interessante Objekte in $\mathbb{CP}^n$:
1) Nullstellenmengen von homogenen Polynome vom Grad d auf $\mathbb{C}^{n+1}$
2) Abbildungen zwischen $\mathbb{CP}^n$ und $\mathbb{CP}^m$, komponentenweise homogene Polynome vom Grad d

z.B. $\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^2$, Grad 1

$(v, w) \mapsto (a_0 v + a_1 w,\ a_2 v + a_3 w,\ a_4 v + a_5 w)$

mit Bedingungen an $a_0, \dots, a_5$

Wieviele projektive Geraden durch 2 verschiedene gegebene Punkte p, q in der projektiven Ebene ($\mathbb{CP}^2$) gibt es?



$\mathbb{C}^3$

Antwort: 1

Bsp (Koniken = (proj.) Kegelschnitte = Nst. von hom. Polynomen vom Grad 2 im $\mathbb{C}P^2$)

$\hookrightarrow K = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \setminus 0 \mid a_0 x^2 + a_1 y^2 + a_2 z^2 + a_3 xy + a_4 yz + a_5 xz \overset{(*)}{=} 0\} / \sim$

Menge der Koniken $\cong \{(a_0, \dots, a_5) \in \mathbb{C}^6\} / \mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}P^5$

„Modulraum"

Idee: $P \in \mathbb{C}P^2 \Rightarrow [P \in K \Leftrightarrow (*) \text{ gilt}]$

lineare Gleichung in $a_0, \dots, a_5$

$\Rightarrow \exists!$ Konik durch 5 vorgegebene Punkte in allg. Lage

Probleme: 1. allg. Lage $\leftrightarrow$ 5 Gleichungen müssen unabhängig sein
2. nicht alle Koniken sind glatt

$\Rightarrow$ Zähle Untervarietäten einer proj. Varietät mit vorgeg. Topologie,
vorgeg. Schnitten mit anderen Untervarietäten,
vorgeg. Tangentialbedingungen an andere Unter-varietäten,
vorgeg. Singularitäten, ...

Allg. Plan:

1. Definiere einen passenden Modulraum (= Menge der geom. Objekte modulo Symmetrie)

Achte auf Struktur (Varietät, Schema, top. Raum, Mfgk, Orbifaltigkeit, DM-Stack)

+ Kompaktheit + Orientierung

2. Beschreibe geometr. Bed. durch Schnittheorie auf Modulraum

wähle so, dass $\sum \dim(\text{Bed}) = \dim(\text{Modulraum})$, (damit was 0-dim. rauskommt)

Algebr. Geometrie : Chow-Theorie + Schnittprodukt
Algebr. Topologie : Kohomologie + Cup-Produkt
Homologie + Schnittprodukt

Modulraum M, komp. orient. top. Mfk.

$\downarrow$

$H^i(M, \mathbb{Q})$ endl. $\mathbb{Q}$-VR für $i = 0, \dots, \dim M$

<u>Idee:</u> $\cup : H^i(M, \mathbb{Q}) \times H^j(M, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^{i+j}(M, \mathbb{Q})$ Cup-Produkt

$\int : H^n(M, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ Integral

Stelle gen. Bed. $\rightsquigarrow$ Elemente in $H^i(M, \mathbb{Q})$

Anzahl: $\int_M \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k$ ← geom. Bed.

3. Korrektur von Fehlern und falschen Modellierungen

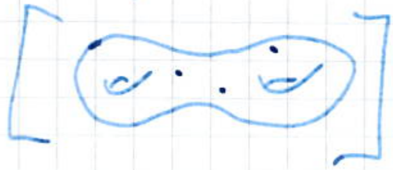
Beitrag der Physik: n_d := #Kurven vom Geschlecht 0 mit Grad d in einer allg. Hyperfläche vom Grad 5 in $\mathbb{CP}^4$

anno 1989: Vorhersage mittels erz. Fkt und TQFT

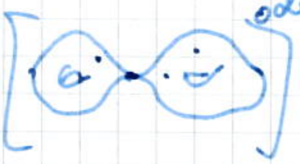
$n_1 = 2875$, $n_2 = 609250$, ..

<u>Bsp.:</u> $\overline{M_{g,n}}$ fixiertes Geschlecht, n markierte Pkte — Deligne-Mumford-Räume

$\ni$ Äq. klassen von Riem. Flächen



oder



$H^2(\overline{M_{g,n}}) \ni \psi_1 \dots \psi_n \rightsquigarrow \langle \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_n} \rangle = \int_{\overline{M_{g,n}}} \psi_1^{k_1} \cup \dots \cup \psi_n^{k_n} \in \mathbb{Q}$

Mit erz. Fkt. handhabbar machen