Der Vierfarbensatz

1852 Vermutung von Francis Guthrie:
4 Farben nötig, auf einer Karte alle Länder verschiedenfarbig anzumalen, sodass zwei benachbarte Länder verschieden eingefärbt sind.

1878 Publikation

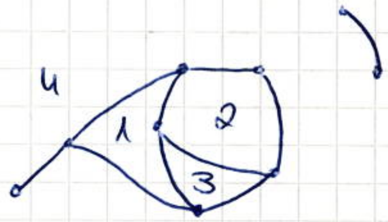
1879, '80 -> Beweise

1890, '91 -> Widerbelegung beider Beweise

__Definition:__ Eine Jordan-Kurve ist eine stetige, injektive Abbildung
$$c: [0, 1] \to \mathbb{R}^2$$

__Definition:__ Ein Graph ist eine endliche Menge von Jordan Kurven, s.d. zwei Jordan-Kurven sich höchstens in ihren Endpunkten berühren.

Bsp.



9 Ecken (E)
10 Kanten (K)
4 Flächen (F)

__Definition:__ Der Grad d(e) einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die in dieser Ecke enden.

__Vier-Farben-Satz:__
In jedem Graphen können die Flächen mit 4 Farben so eingefärbt werden, dass keine benachbarten Flächen diesselbe Farbe erhalten.

Definition: Ein kleinster Verbrecher ist ein nicht-4-färbbarer Graph, so dass jeder Graph mit weniger Farben 4-färbbar ist.

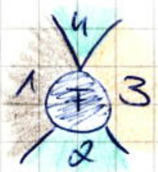
Ziel: Z: Es gibt keinen!

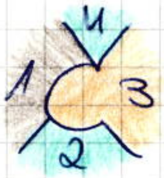
Ausschließen: 2-Ecken, 1-Ecken, Brückenkanten

Satz: In einem kleinsten Verbrecher...

a) ... gibt es keine Flächen mit drei oder weniger Nachbarn.

A: Es gibt





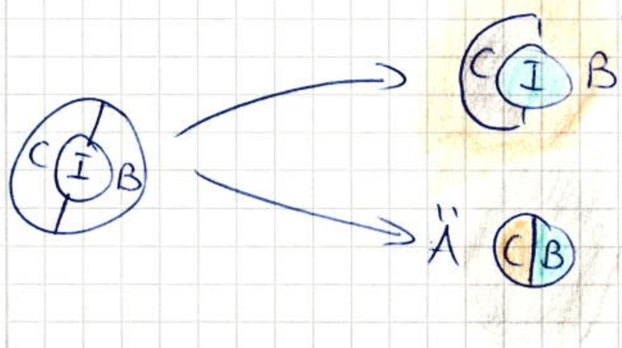
↯ kleinster Verbrecher

b) ... hängen alle Grenzen zusammen

↯ kleinster Verbrecher

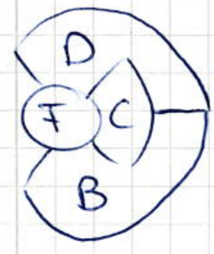
c) ... haben zwei Flächen höchstens eine gemeinsame Grenzlinie

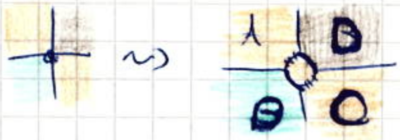
Ä



d) ... hat jede Ecke den Grad 3.

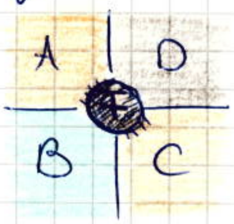
Theorem: Wenn eine Fläche mehr als drei Nachbarflächen hat, so hat sie zwei Nachbarflächen, die nicht aneinandergrenzen.



(zurück zum Beweis) A: 

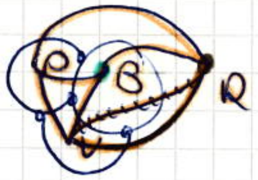
1, C grenzen nicht aneinander

c, ... hat jede Fläche mind. 5 Nachbarn

A: 

1, C nicht benachbart

Im dualen Graphen werden Flächen u. Ecken miteinander vertauscht.



Graph

dualer Graph

Satz: ~~In~~ ~~der~~ einem zu einem kleinsten Verbrecher dualen Graphen ...

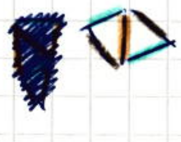
b, ... hängen alle Ecken zusammen

d, ... ist jede Fläche ein Dreieck

c, ... hat jede Ecke mind. Grad 5

~~Theorem~~ Prob.: Ein zu einem KV dualer Graph ist der Graph mit der kleinsten Eckenanzahl, der nicht Ecken-4-färbbar ist.

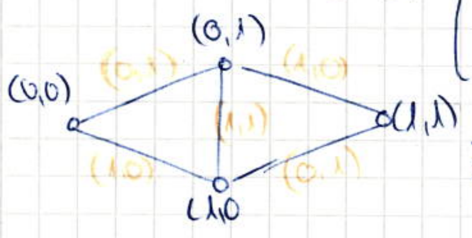
Theorem: Ein Graph ist genau dann Ecken-4-färbbar, wenn er Kanten-3-färbbar ist.



Farben	Addition
(0,0)	0+0=0
(1,0)	0+1=1
(0,1)	1+0=1
(1,1)	1+1=0

Ecken: (0,0), (1,0), (0,1), (1,1)

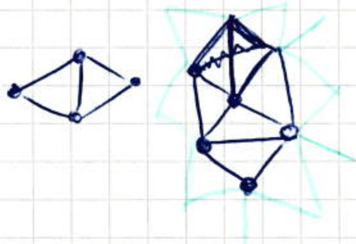
Kanten: (1,0), (0,1), (1,1)



$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

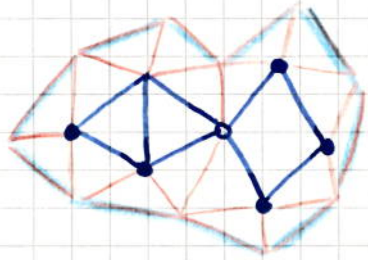
Konfigurationen

sind Ausschnitte aus triangulierten Graphen.



Legende

Symbol	$d(v)$
●	5
•	6
○	7
□	8
▽	9



freie Vervollständigung

mit Ring

Reduzible Konfigurationen

Definition: Eine Konfiguration heißt reduzibel, wenn sie nicht in einem minimalen Gegenbeispiel auftreten kann.

Definition: Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von Kanten-3-Färbungen eines Ringes. Dann heißt $\mathcal{C}$ konsistent, falls für $\forall$ jede Färbung $c \in \mathcal{C}$ (*) und $\forall$ Farbe $y_0 \in \{1,2,3\}$ gilt:

$\exists$ Die Kanten in den Farben $\{1,2,3\} \setminus \{y_0\}$ bilden Paare, sodass gilt:

Wenn in beliebig vielen Paaren beide Kanten von ihrer aktuellen in die andere Farbe aus $\{1,2,3\} \setminus \{y_0\}$ umgefärbt werden, dann ist die so entstehende Färbung in $\mathcal{C}$.

Beob.:
- Die leere Menge ist konsistent.
- Die Vereinigung konsistenter Mengen ist konsistent

Definition: Eine Fast-Triangulation ist ein Graph, in dem alle bis auf eine Fläche ein Δ sind.

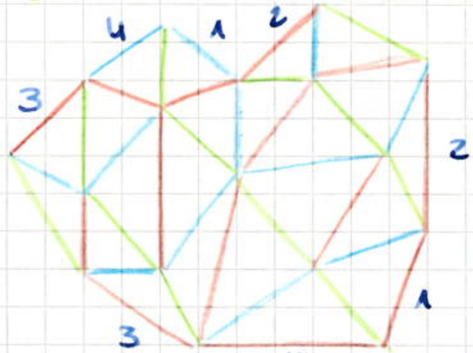
Beob.: Freie Vervollständigungen sind Fast-Triangulationen.

Definition: Der Ring einer Fast-Triangulation ist die Menge der Grenzkanten des Nicht-Dreiecks.

Satz: Sei $\mathcal{C}_K$ die Menge aller Kanten-3-Färbungen einer Fast-Triangulation & $\mathcal{C}$ die Menge aller durch Einschränkung entstehenden Kanten-3-Färbungen des Rings. Dann ist $\mathcal{C}$ konsistent.

Bew.: Sei c eine Ringfärbung, die durch Einschränkung der Färbung der Fast-Triangulation entsteht & $y_0 \in \{●, ●, ●\}$

Sei $y_0 = ●$



● bildet Korridor. Um die Bedingung für die konsistente Menge zu erfüllen, muss man bei allen Kanten, die Farben ändern außer $y_0 = ●$. ● ⇄ ●

Kempe-Ketten-Spiel

Definition: Sei K eine Konfiguration, $\mathcal{C}^*$ die Menge aller Kanten-3-Färbungen des Rings der freien Vervollständigung, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^*$ die Menge aller Kanten-3-Färbungen des Rings, die Einschränkung v. Färbungen der fr. V. sind. Sei $\mathcal{C}'$ die größte konsistente Teilmenge v. $\mathcal{C}^* \setminus \mathcal{C}$. Dann heißt K D-reduzibel, falls $\mathcal{C}' = \emptyset$.

Bem.: D-Reduzibilität lässt sich rein mechanisch nachprüfen!

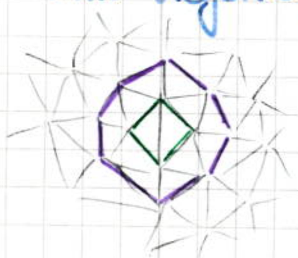
$C_0' := \mathcal{C}^* \setminus \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1' := \{$Alle Färbungen aus C_0', für die (*) gilt$\}$ $\mathcal{C}_2' := \{$ — " — $\mathcal{C}_1'$, — " — $\}$

usw. bis $\mathcal{C}_{i+1}' = \mathcal{C}_i'$.

Dann ist $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_i'$.

Satz: D-reduzibele Konfigurationen sind reduzibel.

Bew.: Sei also K eine D-reduzible Konfiguration, die in ein min. Gegenbsp. eingebettet ist.



Sei $\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ die Menge aller Ring-Färbungen, die Einschränkung von Färbungen der inneren äußeren Fast-Triangulation sind.

Beh.: $\mathcal{C}_1 \neq \emptyset$, $\mathcal{C}_2 \neq \emptyset$, aber $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$

Außerdem: $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sind konsistent.

Also: $\emptyset \neq \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}^* \setminus \mathcal{C}_1$ ↯ D-Reduzibilität

Unvermeidbare Mengen

Definition: Eine Menge von Konfigurationen heißt unvermeidbar, wenn in jedem min. Gegenbsp. eine der Konfigurationen aus der Menge auftritt.

Ziel: Finde unvermeidbare Menge reduzibler Konfigurationen. Wenn möglich, dann gibt es kein min. Gegenbsp.

1976 Appel & Haken: Beweis des 4-Farben-Satzes; benötigten zuletzt ~1500 Konfigurationen

1995 Robertson benötigten 633 " (C-, D-reduzible)

2010 Steinberger " 2822 " (nur D-reduzible)

Eulersche Polyederformel: In jedem zusammenhängenden Graphen gilt: $|E| + |F| - |K| = 2$

Ecken Flächen Kanten

4

In einem triangulierten Graph gilt $|K| = \frac{3}{2}|F|$

$\Rightarrow |E| + |F| - |K| = |E| + \frac{2}{3}|K| - |K| = |E| - \frac{1}{3}|K|$

$\Rightarrow |K| = 3|E| - 6$

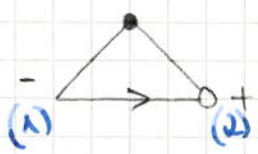
$\sum_{e \in E} d(e) = 2|K| = 6|E| - 12 \Rightarrow$ es gibt in einem min. Gegenbsp. mind. 12 Fünf-Ecken

Wir geben jeder Ecke e die Ladung $10 \cdot (6 - d(e))$

Dann ist die Gesamtladung $\sum_{e \in E} 10 \cdot (6 - d(e)) = 60|E| - 10 \cdot \sum_{e \in E} d(e)$

$= 60|E| - 10(6|E| - 12) = 120$

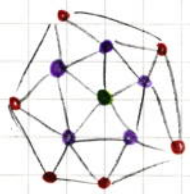
Entladungsregeln: Eine Ladung von (1) wird auf (2) verschoben.



+: Ecke Grad 7 oder mehr

-: Ecke Grad 6 oder weniger

(1) nennt man Quelle, (2) Ziel.



2. Nachbarschaft

Beh.: In der 2-Nachbarschaft einer pos. geladenen Ecke eines min. Gegenbsp. befindet sich eine der 633 reduziblen Konfigurationen.