Der Körper mit einem Element

1 Kombinatorik

Analogie: Teilmengen $\leftrightarrow$ Untervektorräume

q-Analogon: $[n]_q := 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$

$$[n]_q! := [1]_q \cdot [2]_q \cdot \ldots \cdot [n]_q$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q! \, [n-k]_q!}$$

Proposition $\#\{k\text{-dim. UVR} \subseteq \mathbb{F}_q^n\} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$

Beweis $[n]_q = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)\cdot\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{q^{n-k+1}-1}{q-1}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{q-1}{q-1}\right)}{\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{q-1}{q-1}\right)\cdot\left(\frac{q^{n-k}-1}{q-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{q-1}{q-1}\right)}$$

$$= \frac{(q^n-1)\,(q^n-q)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)\cdot(q^k-q)\cdot\ldots\cdot(q^k-q^{k-1})}$$

$\square$

Gleiche Proposition $\#\{(k-1)\text{-dim. lineare Teilräume des } \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_q)\}$
$= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$

Definition Eine projektive Geometrie von Ordnung q ist
$G = (\underset{\text{endlich}}{P}, L \subseteq \mathcal{P}(P), \dim: L \to \{-1, 0, 1, 2, \dots\})$,
so dass

1. L hat Maxima $\vee$ und Minima $\wedge$,
   $\emptyset \in L$, $\{x\} \in L$

2. $\dim(S) = -1 \iff S = \emptyset$

   $\dim(S) = 0 \iff S = \{x\}$

   $\dim(S) + \dim(T) = \dim(S \vee T) - \dim(S \wedge T)$

3. $\dim(S) = 1 \implies |S| = q+1$

- $q \geq 2$, Satz von Desargues, $\dim(\bigvee_{x \in P} \{x\}) = n$ — Resultate

  $\implies G = \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$
- $\dim G \geq 3 \implies$ Satz von Desargues
- $\dim G = 2$: Klassifikation offen

$\#\{k\text{-dim. Lineare Unterräume in } G\} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ — Satz

$q = 1 \implies L = \mathcal{P}(P)$, $\wedge = \cap$, $\vee = \cup$, — Proposition

$\dim(-) = \#(-) - 1$

Gruppen 2

$\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_1) = \{1, \dots, n\} \longleftrightarrow \mathbb{P}GL_n(\mathbb{F}_1) = S_n$

$\mathbb{F}_1^{\,n} = \{0, 1, \dots, n\} \longleftrightarrow GL_n(\mathbb{F}_1) = S_n$

Analogie: $S_n \longleftrightarrow GL_n$

S_n	GL_n
Permutationsdarstellungen	Darstellungen
$\amalg$, $\times$	$\oplus$, $\otimes$
Burnside-Ring	Darstellungsring
$G = \mathrm{Aut}(G\text{-Mengen} \to \text{Mengen})$	Tannaka-Rekonstruktion
...	...

Tits-Gebäude (1957):

A_n	B_n	C_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$\mathbb{P}GL_n$	$\mathbb{P}O_{2n+1}$	$\mathbb{P}Sp$	$\mathbb{P}O_{2n}^{+}$					

Idee: $G = \mathbb{P}GL_n \curvearrowright \mathbb{P}^{n-1}$

Punkte $\cong G/_{\mathrm{Stab}(pt)}$

$$\mathrm{Stab}(pt) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} * & \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{array} \right) \right\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & \\ 0 & * & \\ \vdots & 0 & * \\ & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{array} \right) \right\}$$

Geraden $\cong G/_{\mathrm{Stab}(\mathrm{Gerade})}$

$$\mathrm{Stab}(\mathrm{Gerade}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & \\ * & * & \\ 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{array} \right) \right\}$$

$$\mathrm{Stab}(\mathrm{Flaggen}) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} * & * & & \\ 0 & * & * & \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \right\} = B$$

$\parallel$

maximal Zariski abg. zshgd., auflösb. alg. Untergr.

$P \supseteq B$ parabolische Untergr.

Beispiel $\mathbb{P}GL_3(\mathbb{F}_2) \curvearrowright \mathbb{P}\mathbb{F}_2^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ Basis von $\mathbb{F}_2^3$

Kammer K

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \langle e_1 \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \langle e_1, e_2 \rangle \arrow[d, dash] & & \langle e_1, e_3 \rangle \arrow[d, dash] \\ \langle e_2 \rangle \arrow[dr, dash] & & \langle e_3 \rangle \arrow[dl, dash] \\ & \langle e_2, e_3 \rangle & \end{tikzcd}$$

28 mögliche Basen

$\leadsto$ 28 solche Sechsecke

$\mathrm{Stab}(\langle e_1, e_2\rangle - \langle e_1\rangle) = \left\{\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right\} \subset B$

$\mathrm{Stab}(K) =$ Permutationsmatrizen $\cong S_3$

Oft: $\mathrm{Aut}(\text{Gebäude}) = G$

$\mathrm{Aut}(\text{Kammer}) = G(\mathbb{F}_1)$

<u>Im Allgemeinen:</u>

$\underset{\substack{\text{maximaler}\\ \text{Torus}}}{G \supseteq T} = \left\{\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}\right\} = (K^*)^n$

$W := N(T)/Z(T)$ Weilgruppe

$\mathrm{Stab}(\text{Kammer}) = W$ <u>Satz</u>

$\Rightarrow$ Für Chevalley-Gruppen macht $G(\mathbb{F}_1)$ Sinn:

$$G(\mathbb{F}_1) = W$$

Algebraische Geometrie / Zahlentheorie 3

$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x,y) = 0\}$

<u>Oft genug:</u> $\# X(\mathbb{F}_q) = N(q) \in \mathbb{Z}[q]$

z. B. $Gr_{n,k}(\mathbb{F}_q) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$

$$N(1) := \lim_{q \to 1} \frac{N(q)}{(q-1)^r} =: \# X(\mathbb{F}_1)$$

z.B.: $\# \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_1) = n$, $\# Gr_{n,k}(\mathbb{F}_1) = \binom{n}{k}$

G Chevalley-Gruppe: $G = \coprod_{w \in W} B w B$

$\rightsquigarrow N(q) = \sum_{w \in W} (q-1)^r q^{\partial_w}$ $\qquad \begin{pmatrix} * & * & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow N(1) = |W|$

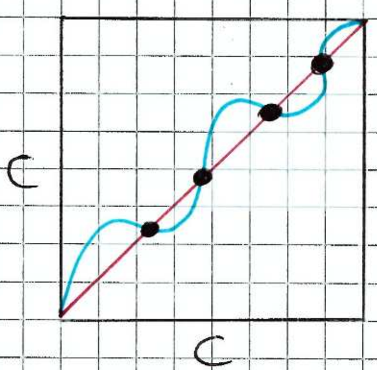
Passt zusammen mit $GL_n(\mathbb{F}_1) = S_n$.

X Schema$/\mathbb{F}_q$ $\rightsquigarrow$ $\zeta(X,s) := \exp\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \# X(\mathbb{F}_{q^\ell}) \cdot \frac{q^{-s\ell}}{\ell}\right)$

Weil-Vermutungen für Kurven $C/\mathbb{F}_q$

$\# C(\mathbb{F}_{q^\ell}) = \#$ Fixpunkte von Frob^ℓ auf $C(\overline{\mathbb{F}}_q)$

$= \#$ Punkte in $\Gamma_{\mathrm{Frob}^\ell} \cap \Gamma_{id}$



$$\begin{tikzcd} C \times_{\mathbb{F}_q} C \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C \arrow[d] \\ C \arrow[r] & \mathrm{Spec}\, \overline{\mathbb{F}}_q \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ Schnitttheorie in $C \times_{\mathbb{F}_q} C$

Das Gleiche für Spec $\mathbb{Z}$?

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \times \widehat{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \widehat{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \arrow[d] \\ \widehat{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \arrow[r] & ? \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)$

Kompaktifizierung von Spec $\mathbb{Z}$

Analogie: Funktionenkörper$/\mathbb{F}$ $\leftrightarrow$ Zahlkörper

Funktionenkörper/$\mathbb{F}$	Zahlkörper
$\mathbb{F}(t)$ Fkt. körper von $\mathbb{P}^1$	$\mathbb{Q}$
$\mathbb{F}[t]$ $\quad \mathbb{A}^1$	$\mathbb{Z}$
Punkte in $\mathbb{P}^1 \rightleftarrows$ Normen auf $\mathbb{F}(t)$	Punkte $\to$ Normen
$\mathbb{A}^1 \ni p \mapsto \lvert\cdot\rvert_p : \mathbb{F}(t) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\sum_{i=k}^{\infty} c_i (t-p)^i \mapsto e^{-k}$	$p \mapsto \lvert\cdot\rvert_p : \sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i \mapsto e^{-k}$
Bei ∞: $\lvert\cdot\rvert_\infty : \mathbb{F}(t) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\sum_{i=k}^{\infty} c_i t^{-i} \mapsto e^{-k}$	Bei ∞: $\lvert\cdot\rvert$ üblicher Betrag
$\mathbb{F}(t)_p \supseteq \mathbb{F}[t]_p = \{ f \mid \lvert f\rvert \leq 1\}$ $\supseteq m_p = \{ f \mid \lvert f \rvert < 1\}$	

$$\mathbb{Q}_p \supseteq \mathbb{Z}_p \supset m_p = p\cdot\mathbb{Z}_p$$

Vervollständigung bzgl. $\lvert\cdot\rvert$

$$\mathbb{Z}_p / m_p = \mathbb{F}_p$$

$$\mathbb{R} \supseteq [-1,1] \supseteq (-1,1)$$

Vervollständigung bzgl. $\lvert\cdot\rvert$

keine Ringe,
keine algebraische Geometrie :(

$$[-1,1]/_{(-1,1)} = \{[-1],[0],[1]\} = \mathbb{F}_\infty = \mathbb{F}_{1^2}$$

Noch eine Motivation: Lokal-global-Prinzipien

$p(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$

Gilt: p hat Lösungen in $\mathbb{Q}_p, \mathbb{R}$
$\overset{?}{\Rightarrow}$ $\exists$ Lösung in $\mathbb{Z}$

Bsp: $\quad p(x,y) = x^2 - cy^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{y^2} = c$

4 Topologie

R Ring $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Proj}^{\text{endl. erz.}}(R)$ $\rightsquigarrow$ $K(R)$ top. Raum

$\oplus, \otimes$

$\mathbb{F}_1$ $\rightsquigarrow$ endl. punktierte Mengen $\rightsquigarrow$ $\mathbb{S}$ Sphärenspektrum

Set_*

$\vee, \times$

Inkarnationen von $\mathbb{F}_1$

1. Minimalistisch: Monoid-Schemata

$\mathbb{F}_1$-Algebren := Monoide, A Monoid.

$\mathfrak{a} \subseteq A$ Primideal $:\Leftrightarrow$ $A \setminus \mathfrak{a}$ mult. abg.

$\mathrm{Spec}\, A := \{\text{Primideale}\}$

Abg. Mengen: $S \subseteq A \rightsquigarrow V(S) := \{\mathfrak{p} \supseteq S\}$

$a \in A \rightsquigarrow D(a) := \mathrm{Spec}\, A \setminus V(\{a\})$

Garbe: $\mathrm{Off}(\mathrm{Spec}(A))^{op} \longrightarrow$ Monoide

$D(a) \longmapsto M[a^{-1}]$

$\mathbb{F}_1$-Schema := lokal so was

Basiswechsel: $\mathbb{F}_1$-Schema $\rightarrow$ $\mathbb{Z}$-Schema

$M \longmapsto \mathbb{Z}[M] = \{\sum_{i=1}^{n} m_i\}$

2. Abstiegsdaten

$R \to S$ Ringhom., dann

$\mathrm{Schemata}/_R \simeq \mathrm{Schemata}/_S$ + Abstiegsdaten

Verallgemeinerte Ringe

3.

z.B.
- Kommutative Monaden
- $\mathbb{F}$-Ringe
- Hyperringe