Kategorientheorie

13.3.17

Eine <u>Kategorie</u> $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Ansammlung $Ob(\mathcal{C})$ von <u>Objekten</u>
- für je zwei $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ einer Ansammlung $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ von Morphismen von X nach Y
- und für je drei Objekte $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$

$$Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to Hom_{\mathcal{C}}(X,Z)$$
$$(f,g) \mapsto f ; g = g \circ f$$

„f für g" Komposition

- für jedes $X \in Ob(\mathcal{C})$ ein Morphismus $id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$

sodass

Assoziativgesetz

→ für alle $X, Y, Z, W \in Ob(\mathcal{C})$ und alle $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,W)$:
$f ; (g ; h) = (f ; g) ; h$

Morphismen id_X sind neutral bzgl. der Verknüpfung

→ für alle $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ und alle $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$: $id_X ; f = f$

und

→ für alle $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ und alle $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$: $f ; id_X = f$

Bsp. Kategorie der Mengen (Set)

Klasse ~~z.B. Menge~~ alle Mengen → Objekte: alle Mengen (z.B. $\emptyset, \mathbb{R}, \{\emptyset\}, \dots$)

lokal klein, da $Hom_{Set}(\cdot,\cdot)$ Mengen

Morphismen: $Hom_{Set}(X,Y) := \{ f: X \to Y \mid f \text{ mengentheoretische Abb.} \}$ ← ist Menge u. dabei zufällig Objekt von Set

Komposition: $f ; g = g \circ f$ ← Verkettung von Abb. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$id_X := (x \mapsto x)$

- große Kategorie: Hom und Objekte Klassen
- Kleine Kategorie: Hom und Objekte Mengen

<u>Bsp</u> Kategorie der $\mathbb{R}$-VR $Vect(\mathbb{R})$

Objekte: alle $\mathbb{R}$-Vektorräume (z.B. $\mathbb{R}^{47}$, $\mathbb{R}^0$, $\mathbb{R}[X]$, $H^1_{d}(\mathbb{R})$)

Wie entspannt ein Kategorientheoretiker? Hom

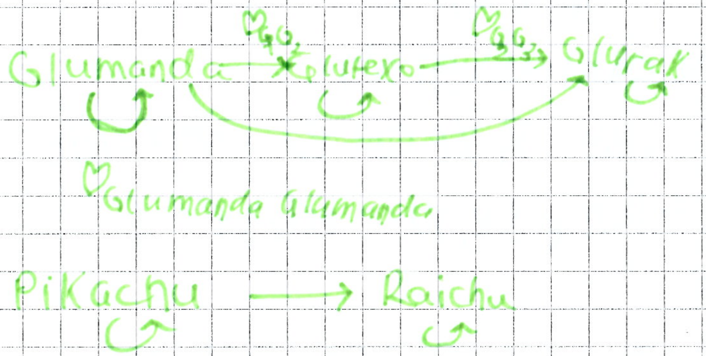
Morphismen: $Hom_{Vect(\mathbb{R})}(V,W) := \{f: V \to W \mid f \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}\}$

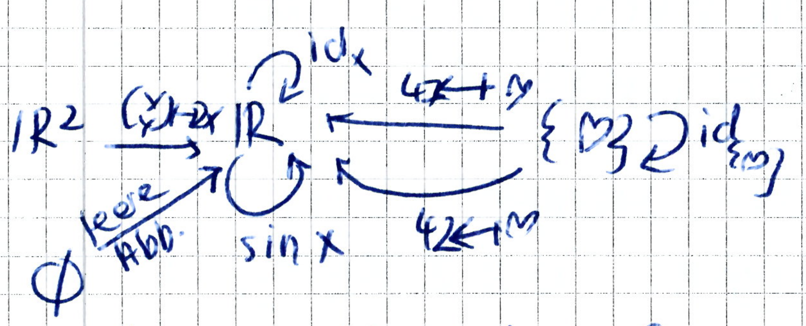
bewusste Entscheidung, dabedeutender

<u>Bsp.</u> Kategorie der Pokémon

Objekte: alle Pokémon (z.B. Glumanda, Pikachu, ...)

Morph. $Hom(P,Q) := \begin{cases} \{\heartsuit_{PQ}\} & \text{falls sich } P \text{ zu } Q \text{ entwickeln kann} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$





leere Kategorie (0 Objekte, leere Abb. als Morphismen)

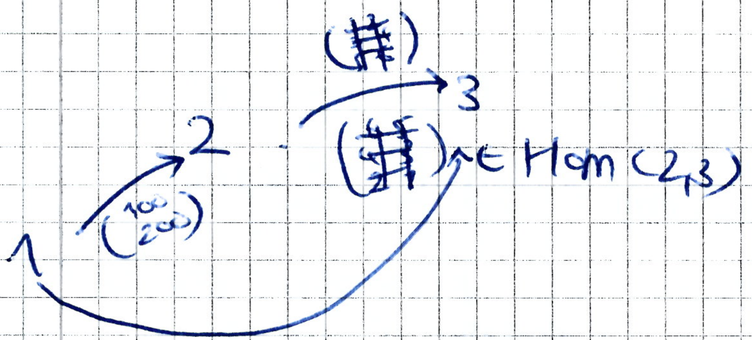
Bsp. Die Numeriker-innen Kategorie

Objekte: alle natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ $(0,1,2,\dots)$

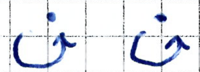
Morphismen: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{N}}(n,m) := \mathbb{R}^{m \times n}$ = Menge der $(m \times n)$ Matrizen

Komp $\quad A ; B = B \circ A$

Matrixmultiplikation



$$\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 1100 \\ 1700 \end{pmatrix}$$

Bsp.  „wandelndes Produkt"

The empty graph – a pointless concept

Bsp. keine initialen Objekte

„wandelndes Faserprodukt"

$\mathrm{Hom}(A,C) = \{ \downarrow \}$ $\qquad \mathrm{Hom}(B,B) = \{ \circlearrowright \}$

$\mathrm{Hom}(B,C) = \{ \downarrow \}$

$\mathrm{Hom}(A,B) = \{ \ \}$

$\mathrm{Hom}(B,A) = \{ \ \}$

Def. Ein terminales Objekt T in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt von $\mathcal{C}$ sodass für jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ genau ein Morphismus in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,T)$ existiert

Def. Ein initiales Objekt I in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt von $\mathcal{C}$ sodass für jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ genau ein Morphismus in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I,X)$ existiert

In Set ist $\emptyset$ ein initiales Objekt und alle einelem. Mengen ein terminales Objekt

Motto: Kategorientheorie stellt Beziehungen zw. Objekten statt etwaiger innerer Struktur der Objekte in den Vordergrund

Bsp In der Kategorie $\boxed{☺}$ ist A initial und terminal

Bsp. In der Kategorie der Poké'mon gibt es weder initiale noch terminale Objekte
(Unterpokémon) (Überpokémon)

Initiale Objekte in der Kategorie der $\mathbb{R}$-VR?
$\emptyset$ ($\mathbb{R}$-VR $\emptyset$ λ

Terminale Objekte! alle einelem Mengen

Def. Ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ heißt genau dann Isomorphismus, wenn es einen Monomorphismus $g: Y \to X$ $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ mit $f \circ g = id_X$ und $g \circ f = id_X$ gibt.

Bsp Isos in Set sind genau die bij Abb.
Isos in Vect($\mathbb{R}$) sind genau die Vektorraumisomorphismen

Lemma seien T und T' terminale (initiale) Objekte in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Dann sind T und T' vermöge (durch) eines eindeutigen Isomorphismus zueinander isomorph.

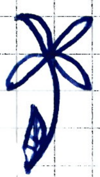
Def. Objekte X, Y einer Kat. $\mathcal{C}$ sind genau dann zueinander isomorph, wenn es einen Iso $f: X \to Y$ in $\mathcal{C}$ gibt. Notation:

$$X \cong Y$$

Beweis Da T' terminal ist, haben wir einen Morphismus $f: T \to T'$.
Da T terminal ist, haben wir einen Morphismus $g: T' \to T$.
Da T terminal ist gilt $f \circ g = \mathrm{id}_T : T \to T$ $\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,T)$
Da
gilt $g \circ f = \mathrm{id}_{T'} : T' \to T'$
Also sind T und T' vermöge f zueinander isomorph.
Es gibt sowieso wegen Terminalität von T' nur einen Morphismus von $T \to T'$, daher erst recht einen Isomorphismus $T \to T'$

Lemma Seien T und T' initiale Obj ...

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, dann heißt folgende Kategorie $\mathcal{C}^{op}$ die zu $\mathcal{C}$ duale Kategorie



Objekte: dieselben wie von $\mathcal{C}$
Morphismen: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$
Komposition: $\underbrace{f \circ g}_{\text{von } \mathcal{C}^{op}} = \underbrace{g \circ f}_{\text{von } \mathcal{C}}$

Bsp. Ein initiales Objekt in $\mathcal{C}$ ist dasselbe wie ein terminales Objekt in $\mathcal{C}^{op}$.

Bsp. $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$

Bsp. Es ist etwas Besonderes, wenn $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}^{op}$ (z.B. ist Numerikerinnenkategorie selbstdual)

Äquivalent von Kategorien

Bsp $Set^{op} \simeq CAHA$
complete atomic Heyting algebras

Def. Ein Morphismus $f: X \to Y$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist genau dann ein Monomorphismus, Epimorphismus
wenn für alle Objekte $Z \in Ob(\mathcal{C})$ und alle Morphismen $p, q: Z \to X$ gilt $Y \to Z$

$p \circ f = q \circ f \Rightarrow p = q$ „linksKürzbarkeit" $f \circ p = f \circ q \Rightarrow p = q$ „rechtskürzbar"

Bsp. in Set sind genau die injektiven Abb Monos

in Set sind genau die surjektiven Abb Epi.

~~Def. Ein Epi Morphismus~~

Bsp. Monos in $\mathcal{C}^{op}$ sind dasselbe wie Epis in $\mathcal{C}$.
Epis in $\mathcal{C}^{op}$ sind dasselbe wie Monos in $\mathcal{C}$.

Bsp. Identitäts-Morphismen sind immer Monos/Epis/Isos

Bsp In der Kategorie der Pokémon sind alle Morphismen Monos und Epis.

Bem. f Mono $\wedge f$ Epi $\not\Rightarrow f$ Iso
(Bsp Pokémon, da keine Umkehrabbildung)
in balancierten Kategorien gilt es

Bsp. In der Kategorie der metrischen Räume sind nicht nur die surjektiven Abb Epis sondern auch die stetigen Abbildungen mit dichtem Bild (Bildmenge ist dichte Teilmenge)

Def. Seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Ein Möchtegern Ko Produkt von X und Y besteht aus

- einem Objekt $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- einem Morphismus $\pi_X : P \to X$ ($\iota_X : P \leftarrow X$) und
- einem Morphismus $\pi_Y : P \to Y$ ($\iota_Y : P \leftarrow Y$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\iota_X"] & P \arrow[l, bend left, "\pi_X"] \arrow[r, bend left, "\pi_Y"] & Y \arrow[l, bend left, "\iota_Y"] \end{tikzcd}$$

Def. Seien $X \xleftarrow{\pi_X} P \xrightarrow{\pi_Y} Y$ ($X \xrightarrow{\iota_X} P \xleftarrow{\iota_Y} Y$) und $X \xleftarrow{\pi'_X} P' \xrightarrow{\pi'_Y} Y$ ($X \xrightarrow{\iota'_X} P' \xleftarrow{\iota'_Y} Y$) Möchtegern Ko Produkte von X und Y. Ein Morphismus von $X \leftarrow P \rightarrow Y$ zu $X \leftarrow P' \rightarrow Y$ besteht aus einem Morphismus $P \xrightarrow{\alpha} P'$ sodass folgendes Diagramm kommutiert

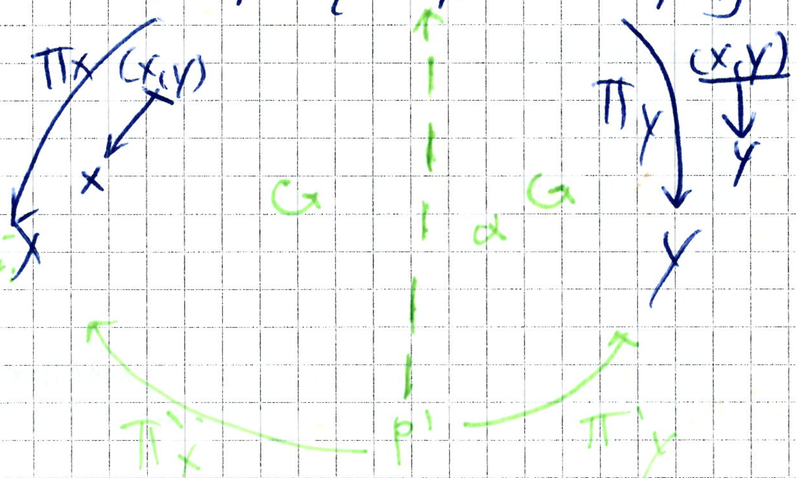
$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] \arrow[dd, "\alpha"] & \\ X \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & & Y \arrow[l, phantom, "\circlearrowright"] \\ & P' \arrow[ul, "\pi'_X"] \arrow[ur, "\pi'_Y"'] & \end{tikzcd}$$

$\alpha \,|\, \pi'_X = \pi_X$ $\qquad$ $\alpha \,|\, \pi'_Y = \pi_Y$

Def. Ein Ko Produkt von X und Y ist ein Ko Möchtegernprodukt $X \xleftarrow{\pi_X} P \xrightarrow{\pi_Y} Y$ (ι_X, ι_Y) sodass für jedes Möchtegern Produkt $X \xleftarrow{\pi'_X} P' \xrightarrow{\pi'_Y} Y$ (ι'_X, ι'_Y) genau ein Morphismus $\alpha : P' \to P$ ($P \to P'$) existiert die das folgende Diagramm zum kommutieren bringt

Bsp. Seien X und Y Mengen, dann ist ein Produkt von X und Y in der Kategorie der Mengen gegeb. durch:

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$



In der Kategorientheorie gilt: Beziehungen wichtiger als innere Struktur

universelle Eigenschaft

Im Leben gilt: innere Strukturen sind genauso wichtig wie Beziehungen

$\alpha : p' \mapsto (?, ??)$

bei Egoisten und Eigenbrötlern gilt: innere Strukturen sind wichtiger als Beziehungen

$\alpha \setminus \pi_X = \pi'_X \quad : p' \mapsto ?$

$\alpha \setminus \pi_Y = \pi'_Y \quad : p \to ??$

$? = \pi_X'(p')$

$?? = \pi_Y'(p')$

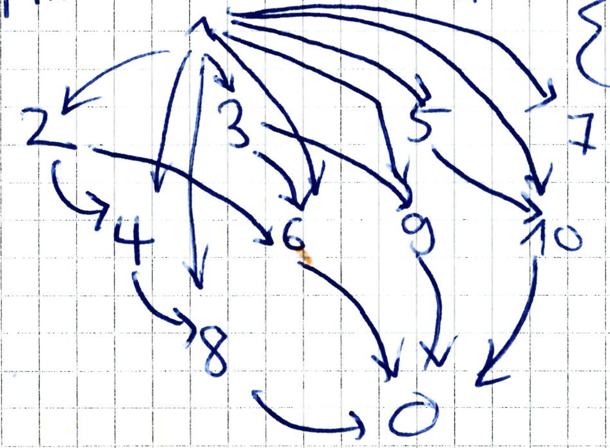
Bsp. Kat. $B(\mathbb{N}, |)$

Objekte: natürliche Zahlen

Morphismen: $\mathrm{Hom}(n,m) = \begin{cases} \{\varphi_{n,m}\} & \text{falls } n \mid m \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$

n teilt m

$4 \mid 12$



In dieser Kategorie ist ein Produkt von 4 und 10 gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\
4 & & 10 \\
 & m \arrow[ul, bend left] \arrow[ur, bend right] \arrow[uu, dashed] &
\end{tikzcd}$$

m Teiler von 4 und 10
$\Rightarrow$ m Teiler von 2

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\
4 & & 10 \\
 & m \arrow[ul, bend left] \arrow[ur, bend right] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

m könnte etwas anderes als 1 sein

<u>Bsp.</u> in $B(\mathbb{N}, \leq)$

Objekte: alle natürlichen Zahlen

Morphismen: $\mathrm{Hom}(n,m) = \begin{cases} \{\beta_{nm}\}, & \text{falls } n \leq m \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[loop left] \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend right] & 1 \arrow[loop below] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & 2 \arrow[loop below] \arrow[r] & 3 \arrow[loop right] \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 10 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
10 & & 20 \\
 & m \arrow[ul, bend left] \arrow[ur, bend right] \arrow[uu, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Produkt ist Minimum

Koprodukt:

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dd, dashed] & \\
2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 3 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & m &
\end{tikzcd}$$

Koprodukt ist Maximum

Produkt in der dualen Kategorie
= Koprodukt in $\mathcal{C}$

Koprodukte in Set sind gegeben durch disjunkt gemachte Vereinigungen

$$X \amalg Y := \{(0,x) \mid x \in X\} \cup \{(1,y) \mid y \in Y\}$$

$$X \xrightarrow{x \mapsto (0,x)} X \amalg Y \xleftarrow{y \mapsto (1,y)} Y$$

$$|X \amalg Y| = |X| + |Y|$$