Bem.: $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$, Es ist etwas Besonderes, wenn $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}^{op}$, z.B. ist die NumerikerInnen-Kategorie selbstdual

Bsp.: $Set^{op} \simeq$ CAHA (coplete atomic Heyting algebras)

!

Bsp.: • Der „kovariante Potenzmengenfunktor": $P: Set \to Set$, $X \mapsto P(X)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & P(X) \arrow[d, "{f[-]}"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & P(Y) \end{tikzcd}$$

$P(X) \longrightarrow P(Y)$
$U \mapsto f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$

• F: NumerikerInnen-Kat $\hookrightarrow Vect(\mathbb{R})$ volltreuer F. („Einbettung")
$n \longmapsto \mathbb{R}^n$
$A \longmapsto (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$
$\qquad\qquad x \mapsto Ax$

• $L: Set \longrightarrow Set$
$X \longmapsto$ Menge der endlichen Listen von Elementen aus $X = \{[a_1,\dots,a_n] \mid n \geq 0, a_1,\dots,a_n \in X\}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & L(X) \arrow[d, "L(f)"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & L(Y) \end{tikzcd}$$

$L(f): L(X) \longrightarrow L(Y)$
$[a_1,\dots,a_n] \mapsto [f(a_1),\dots,f(a_n)]$

NATÜRLICHE TRANSFORMATIONEN

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

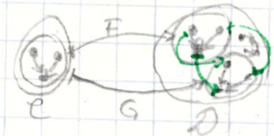
Motivation: Sei $X = \mathbb{Z}$. Dann können wir viele Abb. $X \to P(X)$ hinschreiben:

① $x \mapsto \{x\}$ ② $x \mapsto \emptyset$ ③ $x \mapsto X$ ④ $x \mapsto \{7x-3, 19, x^2\}$ hier gehen willkürliche Wahlen ein

Die Beispiele ①, ②, ③ kann man auch dann hinschreiben, wenn X eine beliebige Menge ist. (nicht unbedingt $\mathbb{Z}$)

Def.: Seien $F, G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine <u>natürliche Trafo</u> $\eta: F \Rightarrow G$ besteht aus: • je einem Morphismus $\eta_X: F(X) \to G(X)$ in $\mathcal{D}$ für jedes Objekt $X \in Ob(\mathcal{C})$, sodass folgende „Natürlichkeits-quadrate" kommutieren:

Komponente von η bei X



$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

für alle $f: X \to Y$ in $\mathcal{C}$, $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$

Bsp.: • (① als natürliche Trafo) $Id: Set \longrightarrow Set$, $X \longmapsto X$, $f \longmapsto f$

$P: Set \longrightarrow Set$, $X \longmapsto P(X)$

$\eta_X: Id(X) \to P(X)$
$x \mapsto \{x\}$

$\eta: Id \Rightarrow P$

$$\begin{tikzcd} Id(X) \arrow[r, "Id(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Id(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ P(X) \arrow[r, "P(f)"'] & P(Y) \end{tikzcd}$$

$\mapsto f(x)$
$\downarrow$
$\mapsto \{f(x)\}$

• $L: Set \longrightarrow Set$, $X \longmapsto L(X) =$ Menge der endl. Listen von Elementen aus X

$K: Set \longrightarrow Set$, $X \longmapsto \mathbb{N}$, $f \longmapsto id_{\mathbb{N}}$

$\eta: L \Rightarrow K$ mit $\eta_X: L(X) \longrightarrow K(X) = \mathbb{N}$
$[a_1,\dots,a_n] \longmapsto n$

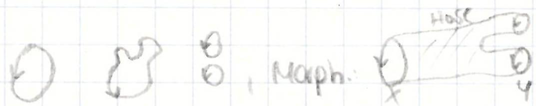
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & L(X) \arrow[r, "L(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] \arrow[dr, phantom, "="] & L(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] & {[a_1,\dots,a_n]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & {[f(a_1),\dots,f(a_n)]} \arrow[d, mapsto] \\ Y & \mathbb{N} \arrow[r, "K(f)"'] & \mathbb{N} & n \arrow[r, mapsto] & n \end{tikzcd}$$

<u>Nichtbsp:</u> L, K wie im Beispiel zuvor, $\eta: L \Rightarrow K$ mit $\eta_X : L(X) \longrightarrow K(X) = \mathbb{N}$

$[a_1, \dots, a_n] \longmapsto \begin{cases} 17 & \text{, falls } X = \mathbb{Z} \\ n & \text{, sonst} \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} = X \arrow[d, "f"', "\text{inkl}"] & L(X) \arrow[r, "L(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] \arrow[dr, phantom, "\times"] & L(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ \mathbb{R} = Y & \mathbb{N} \arrow[r, "K(f) = id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} {[42, 19, 13]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & {[420, 190, 130]} \arrow[d, mapsto] \\ 17 \arrow[r, mapsto] & 17 \neq 3 \end{tikzcd}$$

<u>Motto:</u> Bei natürlichen Trafos η sind alle Komponenten η_X <u>gleichmäßig</u> (in $X \in Ob(\mathcal{C})$) definiert.

<u>Bsp.:</u> · Kathegorie der Cobordismen: Objekte: 

- Sei Met_{compl} die Kategorie der vollständigen metrischen Räume (Obj.: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^7, \dots$)

  $V: Met_{compl} \longrightarrow Set$, $X \longmapsto X$

  $CF: Met_{compl} \longrightarrow Set$, $X \longmapsto CF(X) =$ Menge der Cauchyfolgen in X, $(f: X \to Y) \mapsto (CF(f): CF(X) \to CF(Y))$
  $(a_0, a_1, \dots) \mapsto (f(a_0), f(a_1), \dots)$

  $\eta: CF \Rightarrow V$ mit $\eta_X: CF(X) \longrightarrow V(X) = X$
  $(a_0, a_1, \dots) \longmapsto \lim_{n \to \infty} a_n$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \\ Y \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} CF(X) \arrow[r, "CF(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & CF(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ V(X) = X \arrow[r, "V(f) = f"'] & Y = V(Y) \end{tikzcd}$$

$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \to \infty} a_n)$

- $Id: Vect(\mathbb{R}) \longrightarrow Vect(\mathbb{R})$, $V \mapsto V$, $f \mapsto f$

  $DD: Vect(\mathbb{R}) \longrightarrow Vect(\mathbb{R})$, $V \mapsto V^{**}$, $V^* = \{\alpha: V \to \mathbb{R} \mid \alpha\ \mathbb{R}\text{-linear}\}$, $f \mapsto f^{**}$

  $\eta: Id \Rightarrow DD$ mit $\eta_V: V \longrightarrow V^{**}$
  $x \longmapsto \_(x)$

<u>Nichtbsp:</u> $F: {}^{Fin}Set_0 \longrightarrow {}^{Fin}Set_0$ Kategorie der endl. Mengen und Bijektionen

$X \longmapsto F(X) =$ Menge aller Permutationen von Elementen aus X

(z.B. $F(\{1,2\}) = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\}$)

$G: {}^{Fin}Set_0 \longrightarrow {}^{Fin}Set_0$

$X \longmapsto G(X) =$ Menge der Möglichkeiten, die Elemente von X in einer Liste anzuordnen (z.B. $G(\{1,2\}) = \{[1,2], [2,1]\}$)

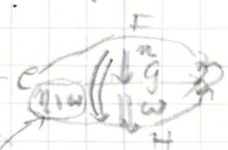
Für jedes $X \in Ob(FinSet_0)$ gibt es eine Bijektion $\eta_X: F(X) \to G(X)$.

<u>Aber:</u> Diese Morphismen sind <u>nicht</u> Teil einer natürlichen Trafo $F \Rightarrow G$

<u>Def:</u> Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Dann gibt es die <u>Funktorkategorie</u> $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, $Funct(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ($Hom_{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$). Objekte: alle Funktoren: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$

Morphismen: $Hom_{[\mathcal{C}, \mathcal{D}]}(F, G) :=$ Menge der natürlichen Trafos $F \Rightarrow G$

Identitäten: $id_F: F \Rightarrow F$ mit $(id_F)_X = id_{F(X)}: F(X) \to F(X)$

Komposition: „vertikale Komposition von natürlichen Trafos" 

$(\eta \circ \omega)_X = \eta_X \circ \omega_X$

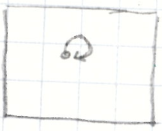
<u>Bem:</u> Wir erhalten das Konzept der <u>Isomorphie von Funktoren</u> geschenkt:

Seien $F, G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Dann: $F \cong G \iff$ ex. $\eta: F \Rightarrow G$, $\omega: G \Rightarrow F$ mit $\eta \circ \omega = id_F$, $\omega \circ \eta = id_G$ $\iff$ ex. $\eta: F \Rightarrow G$, sodass alle $\eta_X: F(X) \to G(X)$ Isos in $\mathcal{D}$ sind

Def.: Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen genau dann zueinander äquivalent, falls es Funktoren $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gibt, sodass $F \circ G \cong Id_{\mathcal{C}}$ und $G \circ F \cong Id_{\mathcal{D}}$

Notation: $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$

Bsp.:

-  $\simeq$ 
- Set $\simeq$ Kat. der Mengen mit einer weiteren leeren Menge $\tilde{\emptyset}$ und einem Iso $\emptyset \to \tilde{\emptyset}$ und genau einen neuen Morph $\tilde{\emptyset} \to X$ für jede Menge X
- NumeriererInnen-Kat. $\simeq$ Kat. der endl. dim. $\mathbb{R}$-VR ($\rightsquigarrow$ $Vect(\mathbb{R})_{fd}$)

F: NumeriererInnen-Kat. $\to Vect(\mathbb{R})_{fd}$

$n \mapsto \mathbb{R}^n$

$A \mapsto (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$

$x \mapsto Ax$

$F \circ G = Id_{Num}$

$G \circ F \neq Id_{Vect(\mathbb{R})_{fd}}$

aber $G \circ F \cong Id_{Vect(\mathbb{R})_{fd}}$

G: $Vect(\mathbb{R})_{fd} \to$ NumeriererInnen-Kat.

$V \mapsto dim(V)$

$V \xrightarrow{f} W$: $f \mapsto$ die Darstellungsmatrix von f bzgl. irgendwelcher fest gewählten Basen in V und W

Satz: Wenn $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$, dann haben $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ genau dieselben Kat. Eigensch.:

- „Die Kategorie besitzt ein initiales Objekt"
- „Für je zwei Objekte enthält die Kategorie ein Produkt"
- „Je zwei parallele Morphismen sind gleich"
- „~~Die Kategorie enthält genau 7 Objekte~~" $\overset{!!}{\cap}$
- „~~Die Kategorie enthält genau 2 terminale Objekte~~"

} Hier wird über Gleichheit von Objekten gesprochen