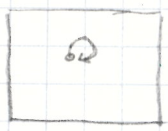
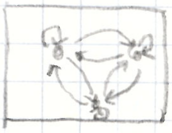
__Def:__ Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen genau dann __zueinander äquivalent__, falls es Funktoren $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gibt, sodass $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ und $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$

Notation: $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$

__Bsp.:__

-  $\simeq$ 

- Set $\simeq$ Kat der Mengen mit einer weiteren leeren Menge $\tilde{\emptyset}$ und einem Iso $\emptyset \to \tilde{\emptyset}$ und genau einen neuen Morph $\tilde{\emptyset} \to X$ für jede Menge X

- Numeriverinnen-Kat. $\simeq$ Kat der endl dim $\mathbb{R}$-VR ($\rightsquigarrow$ $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})_{fd}$)

$$F: \text{NumeriverInnen-Kat} \to \mathrm{Vect}(\mathbb{R})_{fd}$$
$$n \mapsto \mathbb{R}^n$$
$$A \mapsto (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$$
$$x \mapsto Ax$$

$F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathrm{Num}}$

$G \circ F \neq \mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}(\mathbb{R})_{fd}}$

aber $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}(\mathbb{R})_{fd}}$

$$G: \mathrm{Vect}(\mathbb{R})_{fd} \to \text{NumeriverInnen-Kat.}$$
$$V \mapsto \dim(V)$$
$$V \xrightarrow{f} W \quad f \mapsto \text{die Darstellungsmatrix von } f \text{ bzgl. irgendwelcher fest gewählten Basen in } V \text{ und } W$$

__Satz:__ Wenn $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$, dann haben $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ genau dieselben Kat. Eigensch.:

- „Die Kategorie besitzt ein initiales Objekt"
- „Für je zwei Objekte enthält die Kategorie ein Produkt"
- „Je zwei parallele Morphismen sind gleich"
- „~~Die Kategorie enthält genau 7 Objekte~~" $\;\neq\;$ Hier wird über Gleichheit von Objekten gesprochen
- „~~Die Kategorie enthält genau 2 terminale Objekte~~"

LIMITEN & KOLIMITEN

__Bsp:__

- $\mathbb{R}^0 \hookrightarrow \mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5 \hookrightarrow \dots \quad \mathbb{R}^\infty = \{(x_0, x_1, \dots) \mid \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ x_n = 0\}$

  $x \mapsto \binom{x}{0}$, $\binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

  unser erster Kolimes! ☺

- Ring der 10-adischen Zahlen $\ni \dots 2951413$ $\rightsquigarrow$ nach links unendlich weiter

  $\mathbb{Z}_{10} \dots \to \mathbb{Z}/(1000) \to \mathbb{Z}/(100) \to \mathbb{Z}/(10) \to \mathbb{Z}/(1) = 0$

  $[x] \mapsto [x]$, $[x] \mapsto [x]$

  $123 \mapsto 23$, $72 \mapsto 2$

  unser erster Limes! ☺

  ($\mathbb{Z}$ ist möchtegern Limes!)

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \dots \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^0$

  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_0, x_1, \dots) \mid x_0, x_1, \dots \in \mathbb{R}\}$

  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \binom{x}{y}$, $\binom{x}{y} \mapsto x$

  $F: I \to \mathrm{Vect}(\mathbb{R})$, $I = \dots \to 2 \to 1 \to 0$

  $n \mapsto \mathbb{R}^n$

  $(3 \to 2) \mapsto (\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2)$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \binom{x}{y}$

__Def:__ Sei $F: I \to \mathcal{C}$ ein Funktor (vorgestellt als Diagramm).

- Ein __F-Kegel__ (oder „Möchtegern-Limes von F") besteht aus einem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $\pi_i: X \to F(i)$ für alle $i \in \mathrm{Ob}(I)$, sodass für alle Morphismen $f: i \to j$ in I das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] \arrow[d, phantom, "///"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$ „Kegelspitze"

• Ein <u>Limes von F</u> ist ein F-Kegel $(X \xrightarrow{\pi_i} F(i))_{i\in Ob(I)}$, der folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jeden F-Kegel $(X' \xrightarrow{\pi_i'} F(i))_{i\in Ob(I)}$ gibt es genau einen Morphismus $\alpha: X' \to X$ der folgende Diagramme zum kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\pi_i"'] & & X' \arrow[ll, dashed, "\exists!\alpha"'] \arrow[dl, "\pi_i'"] \\ & F(i) \arrow[u, phantom, "//"] & \end{tikzcd}$$ für alle $i \in Ob(I)$

anders formuliert ein Limes von F ist ein terminales Objekt in der Kategorie der F-Kegel.

<u>Bsp.:</u> • Sei $I = \boxed{\overset{\heartsuit}{\circlearrowleft} \quad \overset{\diamond}{\circlearrowleft}}$ ← „wandelndes Produkt". Seien X, Y Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$. Dann können wir definieren: $F: I \to \mathcal{C}$

$\heartsuit \mapsto X$
$\diamond \mapsto Y$
$\circlearrowleft id_\heartsuit \mapsto id_X$
$\circlearrowleft id_\diamond \mapsto id_Y$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi_\heartsuit"'] \arrow[dr, "\pi_\diamond"] & \\ F(\heartsuit)=X & & F(\diamond)=Y \end{tikzcd}$$

Ein F-Kegel sieht dann so aus.

Also sind F-Kegel dasselbe wie Möchtegernprodukte von X und Y!

Und ein Limes von F ist dasselbe wie ein Produkt von X und Y.

• Sei $I = \square$ (die leere Kategorie). Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Dann können wir definieren: Funktor $F: I \to \mathcal{C}$. Dann sieht ein F-Kegel so aus: X ← bel. Objekt aus $\mathcal{C}$.

Ein Limes in F ist also dasselbe wie ein terminales Objekt in $\mathcal{C}$.

• Sei $I = \boxed{\heartsuit \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \diamond}$ („das wandelnde Paar paralleler Morphismen"). Seien X, Y Mengen und seien $a, b: X \to Y$ Abb. Dann definieren wir Funktor $F: I \to Set$

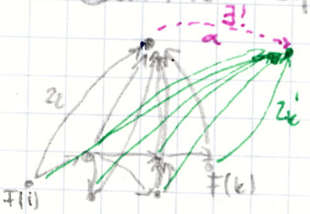
$\heartsuit \mapsto X$
$\diamond \mapsto Y$
$f \mapsto a$
$g \mapsto b$

$$\begin{tikzcd} & eq(a,b) = \{x \in X \mid a(x) = b(x)\} \arrow[dl, "\pi_\heartsuit"'] \arrow[dr, "\pi_\diamond"] & \\ X = F(\heartsuit) \arrow[rr, shift left, "a=F(f)"] \arrow[rr, shift right, "b=F(g)"'] & & F(\diamond) = Y \end{tikzcd}$$

$x \mapsto x$ $\quad$ $x \mapsto a(x)$

<u>Bem.:</u> Seien $a, b: V \to W$ $\mathbb{R}$-lin. Abb. Dann ist $eq(a,b) = Kern(a-b)$

<u>Def.:</u> Kokegel & Kolimes



Kolimiten von F sind initiale F-Kokegel.

<u>Prop.:</u> Sei $F: I \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Dann haben wir einen induzierten Funktor

$F^{op}: I^{op} \to \mathcal{C}^{op}$
$i \mapsto F(i)$
$f \mapsto F(f)$

Dann gilt: „$colim\, F = \lim F^{op}$"

Bsp.: • $\boxed{\circlearrowleft \quad \circlearrowleft}$-förmige Kolimiten sind dasselbe wie Koprodukte

• $\boxed{}$-förmige Kolimiten sind dasselbe wie initiale Objekte

• Sei $X \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} Y$ ein Diagramm in Set. Ein Kolimes dieses Diagramms ist dann

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{coeq}(a,b) = Y/\sim & \\ X \arrow[ur, "{x \mapsto [a(x)] = [b(x)]}"] \arrow[rr, shift left, "a"] \arrow[rr, shift right, "b"'] & & Y \arrow[ul, "{y \mapsto [y]}"'] \end{tikzcd}$$

$Y/\sim$ = Menge der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$

$a(x) \sim b(x)$ für alle $x \in X$, sonst wird nichts weiter, was sich nicht zwingend ergibt, miteinander identifiziert

Aufgabe:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}[U] \arrow[r, hook] \arrow[d, "x \mapsto f(x)"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}$$

← Faserprodukt. Zeige, dass $f^{-1}[U]$ Limes ist.

Bsp.: Sei $(a_0, a_1, \ldots)$ eine schwach monoton steigende Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert a. Sei $I = B(\mathbb{N}, \leq) = \boxed{0 \to 1 \to 2 \to \ldots}$

Sei $F: I \to B(\mathbb{R}, \leq)$
$n \mapsto a_n$

Dann gilt: „$\operatorname{colim} F = a$". Gemeint ist Folgendes Diagramm ist ein Limesdiagramm:

$$\begin{tikzcd} & & a & \\ F(0) = a_0 \arrow[r] \arrow[urr] & a_1 \arrow[r] \arrow[ur] & a_2 \arrow[r] \arrow[u] & \ldots \end{tikzcd}$$

Prop.: Sei $F: I \to Set$ ein Funktor (wobei I eine kleine Kategorie ist). Dann besitzt F einen Limes, nämlich folgenden:

$$\lim F = \{ (x_i)_{i \in Ob(I)} \mid x_i \in F(i) \text{ für alle } i \in Ob(I), (F(f))(x_i) = x_j \text{ für alle } f: i \to j \text{ in } I \} \subseteq \prod_{i \in Ob(I)} F(i)$$

$F(f)$: Abb. $F(i) \to F(j)$

$$\pi_j: \lim F \to F(j), \quad (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$$

Bem.: Also ist die Kategorie Set vollständig.

Prop.: Sei $F: I \to Set$ ein Funktor, I kleine Kategorie. Dann besitzt F einen Kolimes:

$$\operatorname{colim} F := \Big(\coprod_{i \in Ob(I)} F(i) \Big) / \sim$$

$\langle j, F(f)(x) \rangle \sim \langle i, x \rangle$ für alle $x \in F(i)$, $f: i \to j$ in I

$$\iota_i: F(i) \to \operatorname{colim} F, \quad x \mapsto [\langle i, x \rangle]$$

Bem.: Also ist Set kovollständig

Bsp.: Seien V, W $\mathbb{R}$-VR. Dann ist ein Limes des Diagramms $\boxed{V \quad W}$ gegeben durch das kartesische Produkt:

$$V \times W = \{ (v,w) \mid v \in V, w \in W \}$$

$$\pi_V: V \times W \to V, \ (v,w) \mapsto v \qquad \pi_W: V \times W \to W, \ (v,w) \mapsto w$$

$F: Vect(\mathbb{R}) \to Set$
$Z \mapsto Z$
$\alpha \mapsto \alpha$

Wenn wir F auf dieses Limesdiagramm anwenden, erhalten wir

Vergissfunktor

wieder ein Limesdiagramm. ⇝ „F bewahrt Limiten"

der kovariante Hom-Funktor

Bem: X bewahrt Limiten.