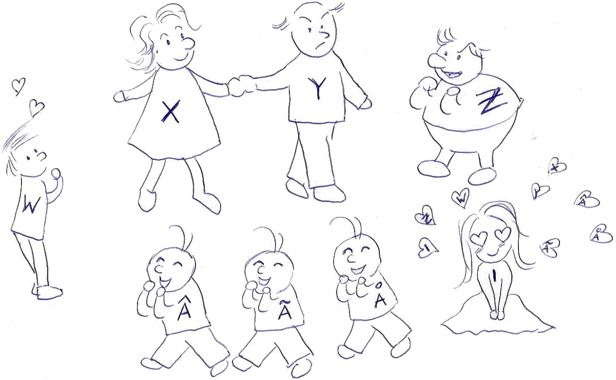
Was sind und was sollen Kategorien?



Ingo Blechschmidt

Gliederung

Produkte in Kategorien I

- Kartesisches Produkt von Mengen: $X \times Y$
- Kartesisches Produkt von Vektorräumen: $V \times W$
- Kartesisches Produkt von Gruppen: $G \times H$
- Minimum von Zahlen: $\min\{n, m\}$
- Größter gemeinsamer Teiler von Zahlen: $\mathrm{ggT}(n, m)$
- Paartyp in Programmiersprachen: `(a,b)`
- Mutterknoten zweier Knoten in einem Graph

All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Produkts*.

Produkte in Kategorien II

$$
\begin{aligned}
X \times (Y \times Z) &\cong (X \times Y) \times Z \\
U \times (V \times W) &\cong (U \times V) \times W \\
\min\{m, \min\{n, p\}\} &= \min\{\min\{m, n\}, p\} \\
\mathrm{ggT}(m, \mathrm{ggT}(n, p)) &= \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(m, n), p)
\end{aligned}
$$

All dies sind Spezialfälle der allgemeinen *Assoziativität* des kategoriellen Produkts.

- Die Mengen $X \times (Y \times Z)$ und $(X \times Y) \times Z$ sind nicht im Wortlaut gleich. Sie sind aber *isomorph*: Es gibt eine Abbildung f von links nach rechts, und diese Abbildung besitzt eine Umkehrabbildung g von rechts nach links, sodass $g \circ f$ und $f \circ g$ jeweils die Identitätsabbildungen sind.

- In Haskell-Notation lassen sich f und g wie folgt angeben:

```
f :: (X,(Y,Z)) -> ((X,Y),Z)
f (x,(y,z)) = ((x,y),z)

g :: ((X,Y),Z) -> (X,(Y,Z))
g ((x,y),z) = (x,(y,z))
```

Isomorphismen in Kategorien

- Zwei Mengen X, Y können gleichmächtig sein.
- Zwei Vektorräume V, W können isomorph sein.
- Zwei Gruppen G, H können isomorph sein.
- Zwei top. Räume X, Y können homöomorph sein.
- Zwei Zahlen n, m können gleich sein.
- Zwei Typen `a`, `b` können sich verlustfrei ineinander umwandeln lassen.

All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Isomorphiekonzepts*.

Dualität

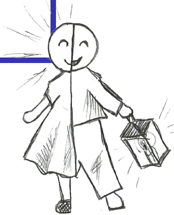
$f \circ g$	$g \circ f$
$\leq$	$\geq$
injektiv	surjektiv
$\{\star\}$	$\emptyset$
$\times$	$\amalg$
ggT	kgV
$\cap$	$\cup$
Teilmenge	Faktormenge

All dies sind Spezialfälle eines allgemeinen *kategoriellen Dualitätsprinzips*.

Dualität

`(a,b)`	`Either a b`
Typ der Streams	Typ der endlichen Listen
Monaden	Komonaden
Rechts-Kan-Erweiterung	Links-Kan-Erweiterung

All dies sind Spezialfälle eines allgemeinen *kategoriellen Dualitätsprinzips*.



- Jedes allgemeine kategorielle Resultat über ein Konzept liefert automatisch auch ein Resultat für das zugehörige duale Konzept.

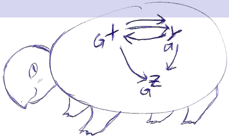
- Wenn man etwa einmal nachgewiesen hat, dass Produkte stets bis auf Isomorphie assoziativ sind – das heißt

  $$X \times (Y \times Z) \cong (X \times Y) \times Z,$$

  so folgt automatisch die duale Aussage für Koprodukte:

  $$X \amalg (Y \amalg Z) \cong (X \amalg Y) \amalg Z.$$

Kategorien



Definition: Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus

1. einer Klasse von *Objekten* $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$,
2. zu je zwei Objekten $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ einer Klasse $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen* zwischen ihnen und
3. einer Kompositionsvorschrift:

$$\begin{array}{rl} \text{zu} & f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ \text{und} & g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \\ \text{habe} & g \circ f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{zu} & f : X \to Y \\ \text{und} & g : Y \to Z \\ \text{habe} & g \circ f : X \to Z, \end{array}$$

sodass

1. die Komposition $\circ$ assoziativ ist: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, und
2. es zu jedem $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ einen Morphismus $\mathrm{id}_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ mit $f \circ \mathrm{id}_X = f$ und $\mathrm{id}_X \circ g = g$.

- Die Morphismen müssen nicht unbedingt Abbildungen sein. Die Schreibweise „$f : X \to Y$“ missbraucht also Notation.

- Archetypisches Beispiel ist Set, die Kategorie der Mengen und Abbildungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\,\mathrm{Set} &:= \{M \,|\, M \text{ ist eine Menge}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, Y) &:= \{f : X \to Y \,|\, f \text{ ist eine Abbildung}\} \end{aligned}$$

- Die meisten Teilgebiete der Mathematik studieren jeweils eine bestimmte Kategorie: Gruppentheoretiker beschäftigen sich etwa mit der Kategorie Grp der Gruppen und Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\,\mathrm{Grp} &:= \text{Klasse aller Gruppen} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G, H) &:= \{f : G \to H \,|\, f \text{ ist ein Gruppenhomo}\} \end{aligned}$$

- Es gibt aber auch wesentlich kleinere Kategorien. Etwa kann man aus jeder Partialordnung $(P, \preceq)$ eine Kategorie $\mathcal{C}$ basteln:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ob}\mathcal{C} &:= P \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) &:= \begin{cases} \text{einelementige Menge}, & \text{falls } x \preceq y, \\ \text{leere Menge}, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

- Auch sind gewisse endliche Kategorien bedeutsam, etwa die durch folgende Skizze gegebene:

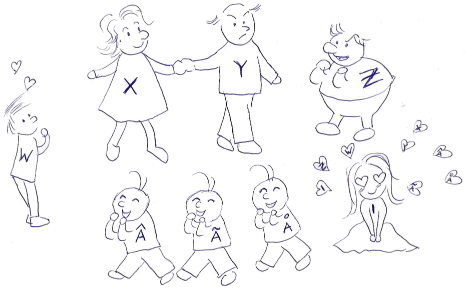
$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[loop above] \arrow[d] \\
\bullet \arrow[loop left] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Gleichungen zwischen Morphismen schreibt man gerne als kommutative Diagramme:

$$
h = g \circ f \qquad \Longleftrightarrow: \qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \arrow[d, phantom, "\%"] & Y \arrow[dl, "g"] \\
& Z &
\end{tikzcd}
$$

Fundamentales Motto

Kategorientheorie stellt *Beziehungen zwischen Objekten* statt etwaiger innerer Struktur in den Vordergrund.



Initiale und terminale Objekte

Definition: Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *initial*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\colon \exists! f : X \to Y.$$
- *terminal*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\colon \exists! f : Y \to X.$$

Frage: Was ist ein terminales Objekt in Set?

Initiale und terminale Objekte

Definition: Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *initial*, wenn

$$\forall Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C} \colon \exists! f : X \to Y.$$

- *terminal*, wenn

$$\forall Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C} \colon \exists! f : Y \to X.$$

In Set: $\emptyset$ initial, $\{\star\}$ terminal.

In Hask: `Void` initial, `()` terminal.

Mono- und Epimorphismen

Definition: Ein Morphismus $f : X \to Y$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *Monomorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und $p, q : A \to X$ gilt:

$$f \circ p = f \circ q \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$

- *Epimorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und $p, q : Y \to A$ gilt:

$$p \circ f = q \circ f \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$

Beobachtung in Set:

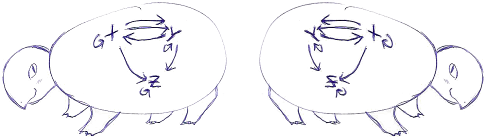
$$f \text{ Mono} \Longleftrightarrow f \text{ injektiv.}$$
$$f \text{ Epi} \Longleftrightarrow f \text{ surjektiv.}$$

Duale Kategorie

- **Definition:** Zu jeder Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es eine zugehörige *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} &:= \operatorname{Ob} \mathcal{C} \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) &:= \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \end{aligned}$$

- **Beispiel:** X in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ initial $\iff$ X in $\mathcal{C}$ terminal
- **Beispiel:** f in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ Mono $\iff$ f in $\mathcal{C}$ Epi
- **Nichttriviale Frage:** Wie kann man in konkreten Fällen $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ explizit (inhaltlich) beschreiben?



Produkte in Kategorien

Definition: Ein *Produkt* zweier Objekte X und Y in einer Kategorie ist ein

- Objekt P
- zusammen mit Morphismen $\mathrm{fst} : P \to X$, $\mathrm{snd} : P \to Y$

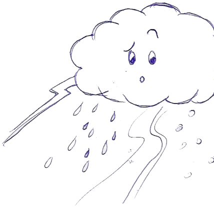
sodass

- für jedes Objekt Q
- und Morphismen $\mathrm{fst}' : Q \to X$, $\mathrm{snd}' : Q \to Y$

genau ein Morphismus $f : Q \to P$ existiert, sodass das Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
& Q \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{fst}'"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{snd}'"] & \\
& P \arrow[dl, "\mathrm{fst}"] \arrow[dr, "\mathrm{snd}"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Anwendungen



- Kategorientheorie liefert einen Leitfaden, um richtige Definitionen zu formulieren.
- Triviales wird *trivialerweise* trivial: Allgemeiner abstrakter Nonsens.
- Konzeptionelle Vereinheitlichung: Viele Konstruktionen in der Mathematik und Informatik sind Spezialfälle von allgemeinen kategoriellen: Limiten, Kolimiten, adjungierte Funktoren
- Forschungsprogramm der Kategorifizierung, um tiefere Gründe für Altbekanntes zu finden.